

drawing disegnare

n. 68
idee immagini
ideas images

Rivista semestrale del Dipartimento di Storia, disegno
e restauro dell'architettura – Sapienza Università di Roma
*Biannual Journal of the Department of History, representation
and restoration of architecture – Sapienza Rome University*

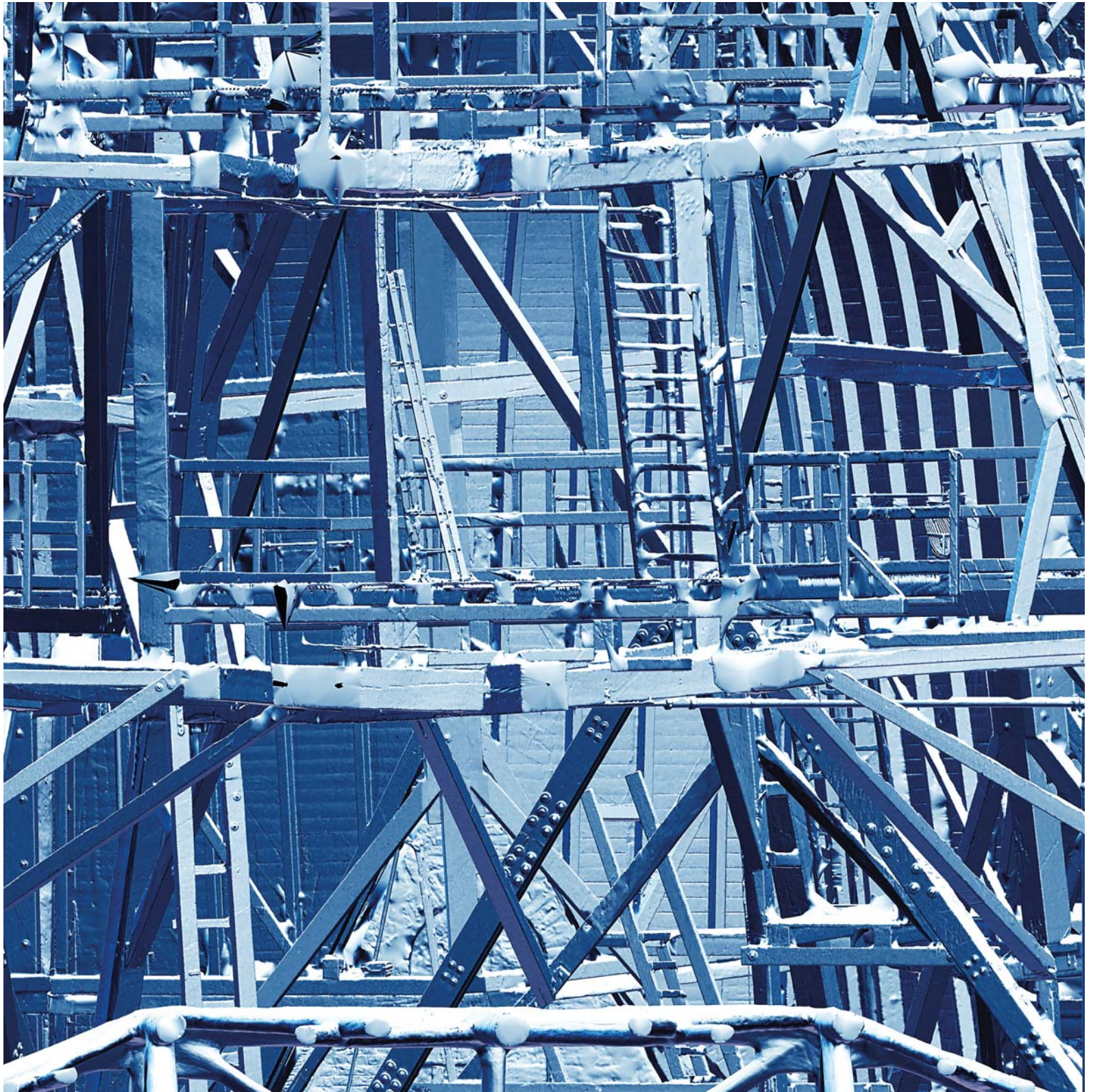
Worldwide distribution and digital version EBOOK
www.gangemeditore.it



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Anno XXXV, n. 68/2024
€ 15,00 - \$/£ 20.00

Full english text





Rivista semestrale del Dipartimento di Storia, disegno e restauro dell'architettura, pubblicata con il contributo di Sapienza Università di Roma
Biannual Journal of the Department of History, representation and restoration of architecture, published with the contribution of Sapienza Rome University

Registrazione presso il Tribunale di Roma n. 00072 dell'11/02/1991

© proprietà letteraria riservata

GANGEMI EDITORE^{spa}
INTERNATIONAL

via Giulia 142, 00186 Roma
tel. 0039 06 6872774 fax 0039 06 68806189

e-mail info@gangemieditore.it
catalogo on line www.gangemieditore.it

Le nostre edizioni sono disponibili in Italia e all'estero anche in versione ebook.
Our publications, both as books and ebooks, are available in Italy and abroad.

Un numero € 15,00 – estero € 20,00 / \$/£ 24.00
Arretrati € 30,00 – estero € 40,00 / \$/£ 48.00
Abbonamento annuo € 30,00 – estero € 35,00 / \$/£ 45.00
One issue € 15,00 – Overseas € 20,00 / \$/£ 24.00
Back issues € 30,00 – Overseas € 40,00 / \$/£ 48.00
Annual Subscription € 30,00 – Overseas € 35,00 / \$/£ 45.00

Abbonamenti/Annual Subscription

Versamento sul c/c postale n. 15911001
intestato a Gangemi Editore SpA
IBAN: IT 71 M 076 0103 2000 0001 5911 001
Payable to: Gangemi Editore SpA
post office account n. 15911001
IBAN: IT 71 M 076 0103 2000 0001 5911 001
BIC SWIFT: BPPIITRRXXX

Distribuzione/Distribution

Librerie in Italia e all'estero/
Bookstores in Italy and overseas
Emme Promozione e Messaggerie Libri Spa – Milano
e-mail: segreteria@emmepromozione.it
www.messaggerielibri.it

Edicole in Italia e all'estero/
Newsstands in Italy and overseas
Bright Media Distribution Srl
e-mail: info@brightmediadistribution.it

Abbonamenti/Annual Subscription

EBSCO Information Services
www.ebscohost.com

ISBN 978-88-492-5280-4
ISSN IT 1123-9247

Finito di stampare nel mese di giugno 2024
Gangemi Editore Printing

Direttore scientifico/Editor-in-Chief

Mario Docci
Sapienza Università di Roma
piazza Borghese 9, 00186 Roma, Italia
mario.docci@uniroma1.it

Direttore responsabile/Managing editor

Carlo Bianchini
Sapienza Università di Roma
piazza Borghese 9, 00186 Roma, Italia
carlo.bianchini@uniroma1.it

Comitato Scientifico/Scientific Committee

Alonzo Addison, *University of California, Berkeley, USA*
Piero Albisinni, *Sapienza Università di Roma, Italia*
Eduardo Antonio Carazo Lefort, *Universidad de Valladolid, Spagna*
Fabiana Carbonari, *Universidad de La Plata, Argentina*
Pilar Chías, *Universidad de Alcalá, Spagna*
Francis D.K. Ching, *Seattle, USA*
Livio De Luca, *CNRS - Centre National de la Recherche Scientifique, Francia*
Marco Gaiani, *Università di Bologna, Italia*
Fernando Gandolfi, *Universidad de La Plata, Argentina*
Natalia Jorquera Silva, *Universidad del La Serena, Cile*
Joubert José Leacha, *Universidade de São Paulo, Brasile*
Cornelie Leopold, *Technische Universität Kaiserslautern, Germania*
Riccardo Migliari, *Sapienza Università di Roma, Italia*
Douglas Pritchard, *Robert Gordon University, Scozia*
Franco Purini, *Sapienza Università di Roma, Italia*
Mario Santana-Quintero, *Carleton University, Canada*

Comitato di Redazione/Editorial Staff

Laura Carlevaris (coordinatore)
Emanuela Chiavoni, Laura De Carlo,
Carlo Inglese, Alfonso Ippolito, Luca Ribichini

Staff edizione multimediale/Multimedia edition Staff

Marina Atteni, Adriana Caldarone, Flavia Camagni,
Marika Griffò, Sofia Menconero

Coordinamento editoriale e segreteria/Editorial coordination and secretarial services

Monica Filippa

Redazione/Editorial office

piazza Borghese 9, 00186 Roma, Italia
tel. 0039 6 49918890
disegnare@uniroma1.it

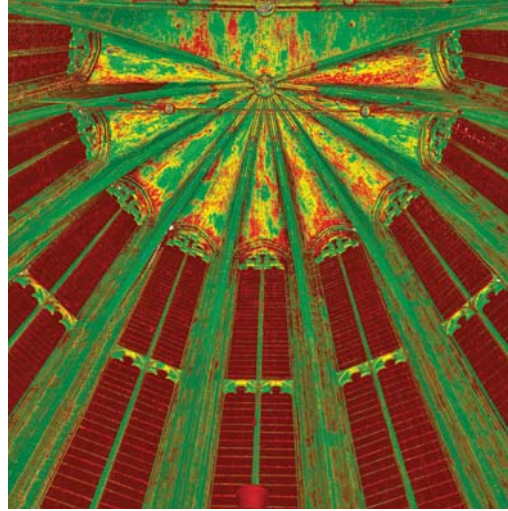
In copertina/Cover

Cattedrale di Aachen. Vista 3D delle strutture di sostegno della cupola esterna (elaborazione di Douglas Pritchard)
Aachen Cathedral. 3D model of the supporting structures of the outer dome (by Douglas Pritchard).

Anno XXXIV n. 68, giugno 2024

- 3 Editoriale di Mario Docci, Carlo Bianchini
La Cattedrale di Aachen, studi e ricerche
Editorial by Mario Docci, Carlo Bianchini
Aachen Cathedral, studies and research
- 7 Jan Richarz
L'importanza di un modello 3D per la Cattedrale di Aachen
The importance of a 3D model for Aachen Cathedral
- 12 Yannick Ley
L'evoluzione della Cattedrale di Aachen in sedici immagini
The evolution of Aachen Cathedral in sixteen figures
- 20 Douglas Pritchard
La documentazione della Cattedrale di Aachen: approcci integrati per la conservazione digitale utilizzando Terrestrial Laser Scanning e fotogrammetria
The documentation of Aachen Cathedral: integrated approaches for digital preservation using Terrestrial Laser Scanning and photogrammetry
- 38 Bruno Schindler
La geometria della Cappella Palatina di Aachen e il sistema di misurazione pratica applicato in cantiere
The geometry of the Aachen Palatine Chapel and the practical measurement system on the building site
- 56 Carlo Bianchini
Sulle unghie coniche della Cappella Palatina di Aachen
The conical vaults in the Palatine Chapel in Aachen
- 72 Martina Atteni, Roberto Barni, Marika Griffò
Sperimentazioni di Machine Learning per la mappatura della Cattedrale di Aachen
Machine Learning experiments for mapping Aachen Cathedral
- 90 Rilievo geometrico e architettonico: disegni tratti dal portfolio
Geometric and architectural survey: drawings from the portfolio

Cattedrale di Aachen. Vista texturizzata della nuvola
di punti del Coro gotico (elaborazione di Marika Griffò).
*Aachen Cathedral. Texturized view of the points cloud
of the Gothic Choir (by Marika Griffò).*





<https://cdn.gangemieditore.com/DOI/10.61020/11239247-202468-05.pdf>

Charlemagne's Palatine Chapel in Aachen, conceived as a central structure with an octagonal plan, exhibits precise geometric relationships between the central space and the surrounding sixteen-sided galleries. A dimensional and proportional analysis conducted in 2017 reconstructed the building's geometry, revealing the harmonious interplay of elements such as pillars and arches, based on $\sqrt{2}$ as a parameter for the octagonal form. A full-scale 1:1 reconstruction demonstrated the chapel's significant aesthetic impact. High-resolution 3D scanning surveys conducted in recent years have precisely documented the structure and provided a robust basis for further research. This study highlights the complementarity of both methods: while 3D scanning confirms the unique geometric features of the Chapel, it also reveals surface deformations accumulated over 1,200 years, offering insights into the historical evolution of the building.

Keywords: Aachen Palatine Chapel, architecture, octagonal structure, geometric relationship, survey, proportional analysis.

The small plane took off and lifted off from the grassy airfield with a jerk and a roar. We, the survey team and the pilot, had our headsets on. We were still able to communicate verbally, but the immediate experience of the rapid ascent in the small plane left us speechless at first. We passengers were wide-eyed as we watched the rapidly changing perspective from the cramped cockpit. Later, when the pilot had stabilized the course of the high-winged aircraft towards Aachen, we could see the Palatine Chapel towering in the middle of the city's sea of houses, the spectacular church building of Charlemagne surrounded by its Gothic chapel wreath, which dominates with dome and lantern its own architectural center: We had studied this Carolingian core of the oldest World Heritage Site in Germany, we had reconstructed the central building idea and also measured out the basic plan of the building in a field experiment outside the city, a little further to the west, in Belgium on a meadow with pegs and ropes and drew its plan precisely with fine white sand in the lush green of the meadow. The real building in the center of the historic city now glided past us, aerial and souvenir photos were taken (fig. 1). But then all eyes turned back to the front, to our actual destination beyond the Aachen city forest and

Bruno Schindler

La geometria della Cappella Palatina di Aachen e il sistema di misurazione pratica applicato in cantiere *The geometry of the Aachen Palatine Chapel and the practical measurement system on the building site*

La Cappella Palatina di Carlo Magno ad Aachen, concepita come struttura centrale a pianta ottagonale, mostra precise relazioni geometriche tra lo spazio centrale e le gallerie a sedici lati. Un'analisi del 2017 ha ricostruito la geometria dell'edificio, evidenziando l'armonia tra elementi come pilastri e archi, basata sul parametro $\sqrt{2}$ a supporto della forma ottagonale. Una ricostruzione in scala 1:1 ha messo in luce il suo grande impatto estetico. Il rilievo tramite scansioni ad alta risoluzione condotto negli ultimi anni, invece, ha documentato con precisione la struttura e fornito la base per ulteriori studi. Questo contributo mette in evidenza come i due metodi siano complementari: la scansione 3D conferma le caratteristiche geometriche uniche della Cappella, mentre rivela anche deformazioni accumulate in milleduecento anni, che testimoniano l'evoluzione storica dell'edificio.

Parole chiave: Cappella Palatina di Aachen, architettura, struttura ottagonale, relazioni geometriche, rilievo, analisi proporzionale.

Il piccolo aereo era decollato dalla pista erbosa con uno scossone e un rombo. Noi, il team di rilevamento, e il pilota indossavamo le cuffie. Potevamo ancora parlare tra di noi, ma la rapida salita in quota nel piccolo velivolo ci aveva lasciati senza parole. Noi passeggeri, con gli occhi spalancati, osservavamo dalla piccola cabina la prospettiva che cambiava rapidamente. Poi, quando il pilota aveva stabilizzato la rotta del velivolo ad ala alta verso Aachen, riuscimmo a vedere la Cappella Palatina svettare in un mare di case: l'imponente chiesa di Carlo Magno circondata dalla sua corona di cappelle gotiche, dominata dalla cupola e dalla lanterna al centro. Avevamo studiato il nucleo carolingio del più antico

sito del Patrimonio Mondiale in Germania, avevamo ricostruito l'idea progettuale dell'edificio centrale e misurato la sua pianta in un esperimento condotto un po' più a ovest, in Belgio. Qui, in un campo erboso fuori città, con l'uso di picchetti e corde, avevamo tracciato la pianta dell'edificio sul prato verdeggianti con precisione, utilizzando della sabbia bianca.

Ora l'edificio si ergeva di fronte a noi, proprio al centro della città storica; avevamo ripreso immagini aeree e scattato foto ricordo (fig. 1). Ma poi tutti abbiamo rivolto nuovamente lo sguardo verso la nostra vera destinazione a ovest, oltre la foresta cittadina di Aachen e il confine belga.



1/ *Pagina precedente.* Veduta aerea di Aachen
(foto di Bruno Schindler).

Previous page. *Aerial view of Aachen*
(photo by Bruno Schindler).

2/ Veduta aerea dell'esperimento del 2017 eseguito
sul campo (foto di Bruno Schindler).

Aerial view of the trade fair experiment, 2017
(photo by Bruno Schindler).



Una vista dall'alto è sempre rivelatrice di aspetti normalmente nascosti nella banalità del quotidiano. Estesi in tutte le direzioni, gli insediamenti suburbani seguivano le strade di campagna e si fondevano lentamente nell'immensità del paesaggio. Un susseguirsi di aree boschive, ruscelli e valli, ma improvvisamente è apparso qualcosa di straordinario e per nulla banale: una forma tondeggiante risplendeva di un bianco argenteo. Un segno deciso e nitido, in cui si potevano riconoscere le sezioni dei muri della pianta della Cappella Palatina di Carlo Magno, che avevamo sorvolato poco prima (fig. 2). La struttura di sabbia delineava una geometria che non poteva lasciare indifferenti: tutti ne fummo subito entusiasti. L'aereo volava in stretti cerchi intorno alla pianta tracciata sul terreno, offrendoci una vista dall'alto del sito dell'esperimento. Ora riuscivamo a vedere, da un'altezza di 150 piedi, tutte le corde che avevamo legato sul terreno. Una settimana di duro lavoro si rendeva visibile di fronte a noi. Tutto è accuratamente documentato mediante fotografie (fig. 3). Stavamo già tornando indietro, ma le emozioni permanevano. L'impressione suscitata da quella pianta dell'edificio originario, che avevamo tracciato passo dopo passo sul prato in scala reale, come si sarebbe fatto milleduecento anni fa, secondo una sequenza rigorosamente stabilita,

misurata con precisione in piedi secondo i dati originali, è indimenticabile.

Sei anni dopo, gli scanner sono nella Cattedrale e nelle piazze circostanti, nel cuore della città. I droni sorvolano la cupola, la torre e i tetti delle cappelle annesse all'edificio. Sotto la direzione del professor Carlo Bianchini e del professor Douglas Pritchard è stato creato, passo dopo passo, un modello digitale, sono stati registrati milioni di punti dell'interno e dell'esterno dell'edificio ed è stata realizzata una documentazione fotografica a colori. Il team di rilevamento italiano della Sapienza Università di Roma ha creato un rilievo complessivo molto accurato della struttura dell'edificio mettendo insieme modelli parziali. L'edificio è stato esaminato da una infinità di angolazioni al fine di acquisire dati completi e accurati. Il team di rilevamento è tornato ad Aachen per diverse campagne di rilievo. Al termine di tutta l'attività è stato possibile analizzare virtualmente l'edificio direttamente sullo schermo di un computer.

Il modello digitale di questo sito riconosciuto Patrimonio Mondiale dell'Umanità fornisce allo strumento importante per programmare i lavori di conservazione. Ciò che in precedenza poteva essere pianificato solo per aree limitate, ora può essere programmato per l'intero edifi-

the Belgian border in the west. A view from above always reveals insights into the normally hidden banalities of everyday life. Suburban settlements spread out, run along country roads and slowly merge into the vastness of the landscape. Wooded areas are followed by streams and valleys – but suddenly something extraordinary and by no means banal emerged: an almost round shape shines silver-white.

An emphatically sharply drawn pattern in which sections of the walls of the floor plan of Charlemagne's Palatine Chapel, which had just before flown over, became visible (fig. 2). The sand structure drew a geometry that leaves no one uninvolved: everyone becomes immediately enthusiastic about. The plane flies round and round in tight curves around the ground plan, giving us an above view of our test site. We see all the ropes we had tied off at close range, now from a height of 150 feet. A week of hard work unfolds before us. Everything is carefully documented in photographs (fig. 3). We are already flying back, but the emotions remain. The impression of the reconstructed original building plan, which we had constructed step by step, as it should have been done 1,200 years ago, on the meadow with the original building dimensions, in a strictly prescribed sequence, precisely measured in feet according to the original building findings, is unforgettable. Six years later scanners are standing in Aachen Cathedral and in the surrounding squares in the heart of the city. Drones fly over the dome, the tower and the roofs of the chapels attached to the building. Under the direction of Professor Carlo Bianchini and Professor Douglas Pritchard, a digital model is created step by step, millions of points are recorded on the inside and outside of the building and documented photographically in color. The Italian surveying team of the Sapienza University of Rome creates a highly precise overall survey of the building fabric from individual partial models of the building documentation. The building must be approached from a wide variety of angles in order to generate complete and accurate data. The surveying team from Italy returns to Aachen for several surveying campaigns. Finally, the building can be virtually inspected and viewed on the screen.

3/ Particolare dell'esperimento del 2017
(foto di Bruno Schindler).
Partial view of the trade fair experiment, 2017
(photo by Bruno Schindler).

The digital model of the World Cultural Heritage site provides the today's Aachen Cathedral's master builder with a powerful tool for planning conservation works in advance. What could previously only be planned in limited areas can now be displayed comprehensively for the entire building: hidden structural damages, crane movements across all roofs, the visibility of building interventions, the structural statics of building elements from different construction phases of Aachen Cathedral, which not only has a Carolingian center, but consists of many individual buildings that have been added to the former Palatine Chapel of Charlemagne over the course of more than 1,200 years of building history. The consistency of all building dimensions, i.e. the precision with which all parts can be measured in the virtual model as well as in reality, is not only due to the well-functioning scanner, but above all to the work of the surveying team, which was able to combine the individual scans into one complete model. Each room cell that could be captured individually by the scanner became one more component that completes the virtual model and optimizes it. In the work process, the proximity to the surfaces of the building is created, whose geometric properties also challenge a scientific interpretation of the building form in the building process on the historical site. Working on the current state of a building is therefore always more than just a description of the current building fabric: it is a basic prerequisite for the scientific investigation of the history of the building. The objectification of the building fabric in a reference space of the digital model makes it possible to feed an artificial field of experimentation for the scientific investigations with the verified data of the scanned building documentation. The building reveals like a document of the time the signification of the itself for whom can read the data. The question arises as to how historical building research is to be evaluated in both cases, what historical value a scanned digital model can have on the one hand and what scientific value a reconstruction of a building recreated and based on historical techniques can have on the other. Which case is a reference for scientific work? Has



cio: i danni strutturali nascosti, i movimenti delle gru sulle coperture, la visibilità degli interventi edilizi, la statica degli elementi costruttivi riferibili alle diverse fasi edilizie della Cattedrale, che si compone oggi non solo di un nucleo carolingio ma di molti edifici che sono stati aggiunti alla Cappella Palatina di Carlo Magno nel corso di oltre milleducento anni di storia costruttiva. La definizione di tutte le dimensioni dell'edificio, vale a dire l'accuratezza con cui tutte le parti possono essere misurate sia nel modello virtuale sia nella realtà, non è solo legata al buon funzionamento dello scanner ma soprattutto al lavoro del team di rilevamento, che è riuscito a riunire le singole scansioni in un modello completo. Ogni zona acquisita singolarmente dallo scanner è entrata a far parte del modello virtuale completo e lo ottimizza. È stato ricreato un rapporto ravvicinato con le superfici dell'edificio, le cui proprietà geometriche pongono anche una sfida nell'interpretazione scientifica della sua forma in relazione al processo costruttivo. Lavorare sullo stato attuale di un edificio è quindi sempre più di una semplice descrizione della struttura presente: è un presupposto fondamentale per l'indagine scientifica della sua storia. L'oggettivazione della fabbrica nello spazio di riferimento del modello digitale consente di alimentare un ambito artificiale di sperimentazione funzionale a indagini scientifiche basate sui dati verificati della documentazione tridimensionale acquisita. Alla pari di un documento storico, l'edificio

rivela il suo vero significato a chi è in grado di interpretare i dati.

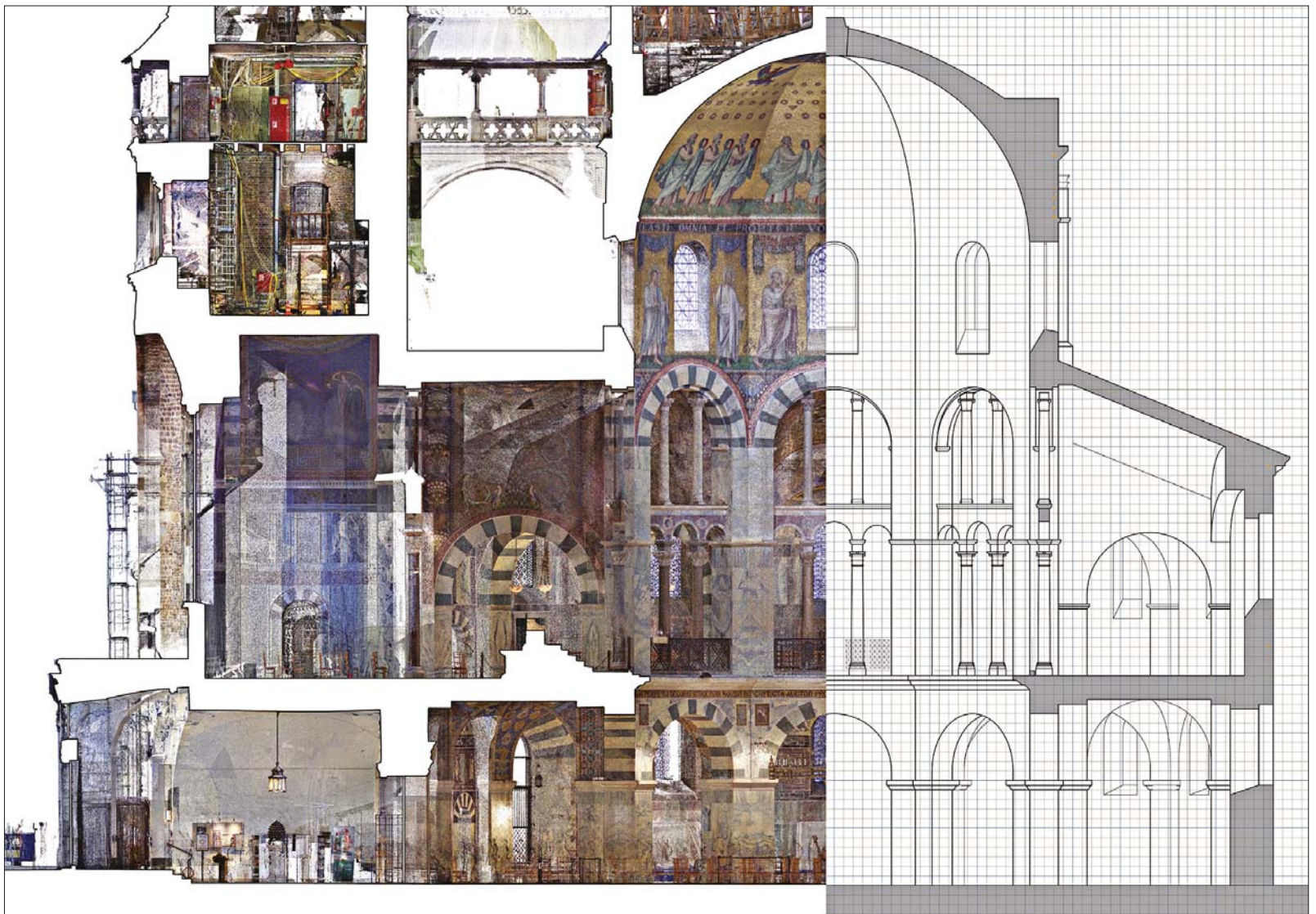
Allora la domanda relativa alla valutazione della ricerca sugli edifici storici assume un duplice aspetto: ci si interroga da una parte, sul piano storico, sul valore di un modello digitale realizzato a partire da un'acquisizione tramite scanner laser, dall'altra, sul piano scientifico, sul valore scientifico di una ricostruzione basata sulle metodologie della ricerca storica. Quale tra i due strumenti rappresenta un reale riferimento per il lavoro scientifico? La componente emotiva e la soggettività della ricerca storica hanno un valore comparabile con quello dei dati oggettivi dell'edificio rilevato? Per essere più precisi, la corrispondenza tra l'idea di edificio ricostruito con tutte le operazioni di scansione risulta scientificamente provata?

Chi si pone in quest'ottica, può consultare la ricerca presentata nella nostra pubblicazione del 2017 [Pieper, Schindler 2017] e riconoscere la totale corrispondenza (fig. 4) tra quanto lì presentato e le nuvole di punti ottenute tramite la scansione puramente quantitativa eseguita dalla Sapienza Università di Roma nel 2023 [Pritchard et al. 2023]. L'idea costruttiva della Cappella Palatina e la nuvola di punti sono due descrizioni molto diverse della stessa realtà dell'edificio di Aachen [Pritchard 2023]: la bellezza visiva della nuvola di punti e l'unitarietà concettuale delle dimensioni e della geometria delle forme.

L'edificio nel suo contesto storico

La Cappella Palatina di Carlo Magno ad Aachen rimase per lungo tempo dopo la sua costruzione uno dei più grandi e spettacolari edifici a nord delle Alpi: una volta a cupola alta oltre 30 metri venne eretta su uno spazio centrale ottagonale, con una campata di quasi 15 metri. Qui, dall'alto delle gallerie che circondavano lo spazio, il sovrano Carlo Magno e la sua corte seguivano le messe sacre (fig. 5). In Europa non si è mai spenta la memoria di questa corte, che per circa venti anni dopo l'incoronazione dell'imperatore, avvenuta nell'800, ha trovato sede ad Aachen. Non sorprende che l'edificio sia stato il primo monumento in Germania a essere inserito nella lista del Patrimonio Mondiale dell'UNESCO nel 1969.

4/ Sezione della Cappella Palatina. A sinistra: scansione della parte occidentale (Sapienza Università di Roma); a destra: ricostruzione sulla griglia del pes agrimensorum (cm 35,37) (elaborazione di Bruno Schindler).
Section of the Palatine Chapel. Left: modern scan of the western part (Sapienza University of Rome); right: reconstruction of the original plan with the grid of pes agrimensorum (35.37 cm) (by Bruno Schindler).



L'edificio centrale della Cattedrale, unitamente ad altri resti di strutture del palazzo imperiale, rappresenta il patrimonio architettonico di epoca carolingia più esteso che ci è rimasto. Le successive aggiunte di numerose cappelle che circondano l'edificio testimoniano il continuo impegno dei successori di Carlo Magno per proteggere il nucleo strutturale di questa chiesa, luogo simbolico di fondazione del potere imperiale. Le incoronazioni dei re tedeschi che si tenevano ad Aachen e i pellegrinaggi regolari alle leggendarie reliquie bibliche che si dice Carlo Magno avesse ricevuto in dono direttamente da Gerusalemme, hanno legato

saldamente questa chiesa alla storia europea fino alla dissoluzione del Sacro Romano Impero germanico nel 1802. Anche in seguito, sotto il dominio francese prima e prussiano in seguito, l'Impero e l'edificio della Cappella Palatina furono utilizzati per l'auto-promozione politica dei governanti. Allargando gli orizzonti, si può dire che ciò ha portato all'idea della moderna unificazione dell'Europa, e nel 1964 ha trovato il suo culmine in una mostra internazionale sulla figura di Carlo Magno [Braunfels 1965; Braunfels 1968].

Più rilevante per la storia della Cattedrale è il valore del nucleo dell'edificio ancora esistente

the emotional part and subjective quality of historical practice just a comparable value as objectively scanned sparse building data? To be more precise, is the unity of the reconstructed building idea and the scanned building findings scientifically proven?

Anyone who follows this axiom will be able to lecture the research done in our book publication in 2017 [Pieper, Schindler 2017] and see the complete compliance (fig. 4) with the point clouds based on the purely quantitative scan by Sapienza University of Rome in 2023 [Pritchard et al. 2023]. The building idea of the Palatine Chapel and the points cloud

5/ Interno della Cappella Palatina (foto di Bruno Schindler).
Interior of the Palatine Chapel (photo by Bruno Schindler).
 6/ Interno della Cappella Palatina prima degli interventi del 1902 (Albrecht Haupt, *Monumenta Germaniae Architectonica*, Leipzig 1913, tav. 5).
*Inside the Palatine Chapel before the renovation in 1902 (Albrecht Haupt, *Monumenta Germaniae Architectonica*, Leipzig 1913, tav. 5).*

scan are both two very different descriptions of the same reality of the building in Aachen [Pritchard 2023]: the visual beauty of the points cloud and the conceptual unity of dimensions and geometry of shapes.

The building in its historical context
Charlemagne's Palatine Chapel in Aachen remained one of the largest and most spectacular buildings north of the Alps for a long time after its construction: a domed vault over 30 meters high was erected over an octagonal central space with a span of almost 15 meters, into which the ruler, Charlemagne, and his court followed the holy masses looking down from towering galleries all around (fig. 5). The memory of the permanent court in Aachen, which lasted for around 20 years around the emperor's coronation in 800, has never died out in Europe. It was not surprising that the building was the first monument in Germany to be introduced on the UNESCO World Heritage List in 1969.

The central core building of Aachen Cathedral, together with other structural remains of the imperial palace in Aachen, provides the most extensive building heritage that has survived from Carolingian times. The later additions of numerous chapels that surround the building today bear witness to the constant efforts of Charlemagne's successors to protect this church in the structural center as a symbolic founding place of imperial rule north of the Alps. The coronations of the German kings held in Aachen and the regular pilgrimages to the legendary biblical relics, which Emperor Charlemagne is said to have received directly from Jerusalem, firmly anchored the church building in European history until the dissolution of the Holy Roman Empire of the German Nation in 1802. Even later, under the French and later under the Prussian rule, the emperorship and its Palatine Chapel building were appropriated for political self-promotion of the rulers. In extension it led to the idea of modern European unification and in 1964 it culminates in an International Charlemagne Exhibition [Braunfels 1965; Braunfels 1968]. More important for the history of Aachen Cathedral is the value of the original core



in situ, tuttora ampiamente preservato nell'area dell'antico palazzo e in particolare nella Cappella Palatina [Krücken et al. 2016]. Tuttavia, va sottolineato che molti degli elementi



oggi visibili di quest'ultima sono spesso solo trasformazioni o rifacimenti di quelli originali. Intorno al 1902, all'interno della Cappella furono realizzati mosaici e rivestimenti marmorei nello stile dell'architettura bizantina per coprire le pulite superfici dell'edificio carolingio: durante questo processo alcuni importanti angoli di pilastri e in particolare gli archi originali dell'ottagono centrale furono distrutti per sempre con martello e scalpello (fig. 6) [Strzygowski 1904]. L'interno magnificamente decorato, che è frutto di questo rifacimento, mostra più i tratti di un interno in stile *Art Nouveau* che di una ricostruzione scientifica dello spazio in linea con lo spirito degli architetti di Carlo Magno! [Konnegen 2011]. Ad Aachen lo storico dell'architettura deve ricorrere alle metodologie della ricerca scientifica per un esame critico dello stato attuale della costruzione [Maintz 2012]. Lo sviluppo delle metodologie di rilievo digitale e, in particolare, l'analisi complessiva delle scansioni delle superfici visibili, forniscono nuove importanti informazioni sulla realizzazione del manufatto carolingio, se nel modello digitale vengono identificate le trasformazioni successive.

L'idea architettonica, le linee di forza e la geometria del sistema costruttivo

La Cappella Palatina di Aachen è uno di quegli edifici in cui l'organizzazione architettonica degli spazi risulta immediatamente chiara all'osservatore (fig. 5). Un ampio ambiente centrale svetta in altezza dominando l'intero edificio; otto archi simmetrici si aprono su un basso ambulacro nella parte inferiore e su una galleria nella parte superiore [Heckner, Beckmann 2012]. L'ingresso avviene attraverso un vestibolo a ovest che conduce direttamente nella sala centrale attraverso l'ambulacro. All'altra estremità, a est, il deambulatorio inferiore ospita l'altare dedicato a Maria. Ai lati del vestibolo vi sono scale a chiocciola che conducono alla galleria che nella parte occidentale ospita il trono di Carlo Magno. La galleria superiore si affaccia sulla sala centrale con otto aperture ad arco: qui una serie di colonne con funzione decorativa sembra delimitare lo spazio ottagonale centrale [Alcuinus, *Epistulae* 1777]. Queste colonne non hanno funzione statica ma vanno a ricreare un colonnato regolare nello stile de-

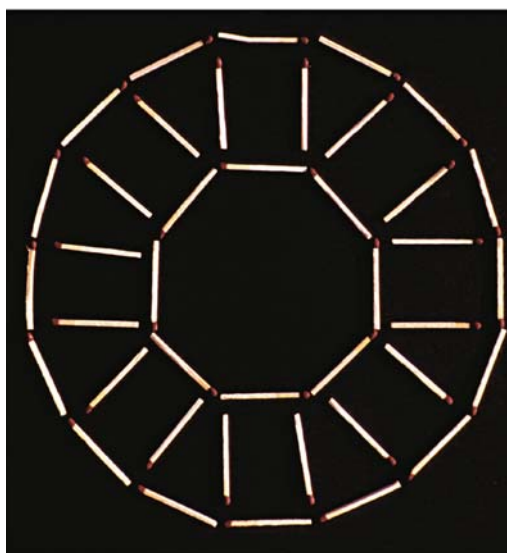
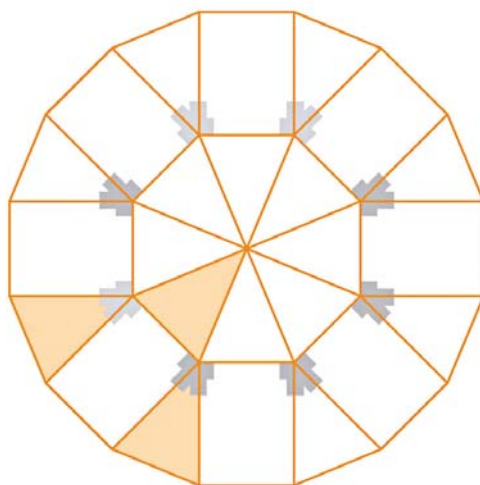
7/ Geometria delle linee di forza (elaborazione di Bruno Schindler).

Geometry of the lines of force (by Bruno Schindler).

gli antichi *martyria*, nascondendo alla vista ciò che accade oltre, nel corridoio della galleria.

In alto, un tamburo sostiene una cupola ottagonale che già al tempo di Carlo Magno era decorata con un mosaico simile a quello attuale, che raffigura i 24 anziani dell'Apocalisse al cospetto del Redentore [Wehling 1995]. La sala ottagonale centrale ricorda la chiesa bizantina di San Vitale edificata a Ravenna circa duecentocinquanta anni prima. Tuttavia la differenza tra i due edifici sta nel fatto che ad Aachen l'ottagono domina l'intero spazio, dal pavimento fino alla sommità della cupola, mentre a Ravenna si trasforma, in corrispondenza dell'imposta della cupola, in un cerchio [Ley 2014]. Ad Aachen la massiccia muratura della cupola a volta poggia sulla sommità del tamburo ottagonale, rinforzato a tale scopo con tre ancoraggi rettilinei ciascuno realizzato da otto tiranti forgiati. Le otto superfici a botte chiudono lo spazio in corrispondenza delle otto diagonali dell'ottagono. I tiranti dell'anello assorbono dunque le spinte della cupola. In questo modo è il suo solo peso a essere scaricato sulla muratura verticale del tamburo. Quest'ultimo si appoggia a sua volta sugli otto archi delle gallerie superiori, che generano altre forze di spinta verso l'esterno in corrispondenza dei pilastri angolari dell'ottagono. Queste sollecitazioni di circa 40 tonnellate vengono scaricate sulle coppie di muri alle spalle di ogni pilastro (circa 20 tonnellate ciascuno) [Gerhardt, Kurrer, Pichler 2003] e poi ancora più verso il basso, fino alle fondamenta dell'edificio in corrispondenza della galleria.

Le coppie di muri alle spalle degli otto vertici dell'ottagono vanno dunque a creare il perimetro murario esterno a sedici lati della Cappella Palatina. Anche qui, tiranti rettilinei montati ad anello contrastano tutte le forze provenienti dalla volta, garantendo così la stabilità della struttura. Gli elementi portanti formano uno schema concentrico costituito da due anelli di tensione, un ottagonato e un esadecagono collegati mediante muri convergenti verso il centro. Questi, sfruttando la resistenza a compressione della muratura, contrastano la spinta radiale: il diagramma statico mostra il raddoppio del poligono centrale da otto a sedici lati. Lo schema del passaggio da un esagono a un esadodecagono attraverso quadrati e triangoli



building stock still existing in situ, which has been richly preserved to this day in the area of the old palace and especially in the Palatine Chapel [Krücken et al. 2016]. Nevertheless, it must be emphasized directly here that many components of the Palatine Chapel that are visible today are often only transformations or vaguely remakes from their times. Inside, mosaics and marble cladding in the style of Byzantine architecture were introduced around 1902 to cover up the plain surfaces of the Carolingian building fabric: in the process, some important pillar corners and in particular the original arches of the central octagon were invasively destroyed forever with hammer and chisel (fig. 6) [Strzygowski 1904]. Today, the magnificently decorated interior of Aachen Cathedral emerging from this remake thus shows more the traits of a historicizing Art Nouveau interior than a scientific reconstruction of the spatial idea in the spirit of Charlemagne's master builders! [Konnegen 2011]. The architectural historian must use in Aachen the methods of building research with the aim of critically examination of the current condition of the building fabric [Maintz 2012]. The development of digital surveying methods, in particular the uniform evaluation of laser scans of the visible surfaces provides important new insights into the building fabric of the Carolingian center, if the impact of later transformations is included to the digital surveying model.

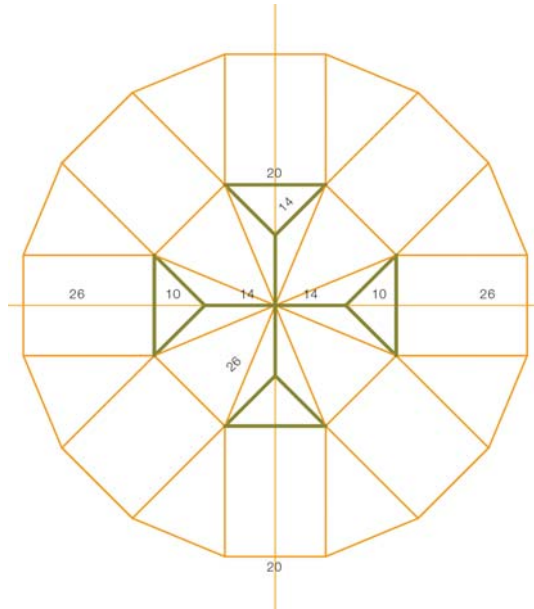
The building idea, the lines of forces and the geometry of the central building system

The Palatine Chapel in Aachen is one of those buildings whose architectural spatial structure is immediately apparent to the observer (fig. 5). A wide and high central space dominates the entire building, whose eight symmetrical arcades radiate into a low lateral circumambulatory below and galleries above [Heckner, Beckmann 2012]. The entrance is in the west through a vestibule and through the ambulatory bay directly into the central room. At the other end, in the east, the lower ambulatory bay houses the altar dedicated to Mary. Spiral staircases at the sides of the vestibule are giving access to the galleries, which lead visitors to the western bay, where the throne of Charlemagne still stands

8/ Geometria del raddoppiamento del poligono
(elaborazione di Bruno Schindler).
Geometry of the polygon doubling (by Bruno Schindler).
9/ Campagna di misurazioni del 2002. Rilievo simultaneo
con due strumentazioni (elaborazione di Bruno Schindler).
*The 2002 measurement campaign. Simultaneous survey with
two instruments (by Bruno Schindler).*

today. The gallery bays open very highly with eight arched facades up to the all-dominant central room, albeit column grid facades for decorative purposes seem to close the central octagonal space [Alcuinus, *Epistulae* 1777]. Under the arches of the galleries, these column lattices have no static function. They merely form an evenly encircling colonnade in the style of the ancient martyrions and conceal what is happening behind them on the gallery walkway. Above the galleries of the central room, a tambour supports a final eight-sided dome, which was already in Charlemagne's time decorated with a mosaic similar to the today's version showing the 24 elders of the Apocalypse before Jesus, the Redeemer on the Last Day [Wehling 1995].

The central octagonal main room is reminiscent of the Byzantine church of San Vitale built in Ravenna around 250 years before the Aachen building. Nevertheless, the two buildings differ because in Aachen the octagon predominates everywhere, from the church floor to the apex of the dome, while in Ravenna the octagon changes into the dome's circle [Ley 2014]. In Aachen, the massive masonry of the vaulted dome rests on the crown of the octagonal tambour reinforced for this purpose with three anchors made each of eight straight forged tie rods. The eight straight vault surfaces complete the space directly above the eight axes of geometry. The tensioned ring tie rods are absorbing the thrust forces emanating from the vault. Thus, only the weight of the vault is absorbed in the vertical tambour masonry. These loads rest on the eight arches of the upper galleries, which generate outward other thrust forces in the corner pillars of the octagon. These forces of around 40 tons are transferred behind each pillar via walls arranged in pairs (20 tons each) [Gerhardt, Kurrer, Pichler 2003]. They are transferred further outwards in the depth of the gallery towards the foundations at the very bottom of the building. The pairs of wall panels behind the eight corners of the octagon create the sixteen-sided wall perimeter of the Palatine Chapel on the very outside. Here too, straight tie rods installed in a ring shape are absorbing all the thrust forces of the vaults with the ring tensile forces of the ring tie rods and thus secure the structure. The statically effective elements form



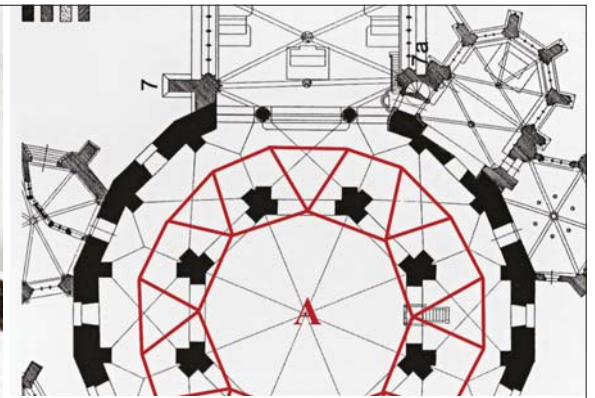
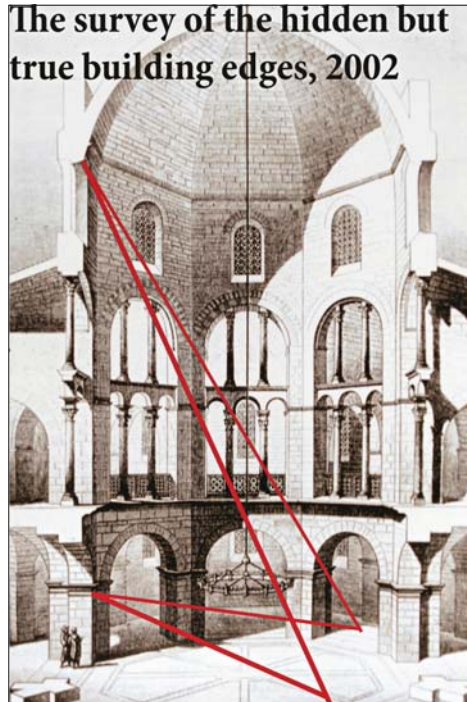
equilateri è immediatamente comprensibile a tutti. Per il raddoppio di un poligono da otto a sedici lati, il triangolo caratterizzante è quello dell'ottagono: riposizionandolo simmetricamente oltre i vertici dell'ottagono otteniamo

un poligono esterno i cui lati hanno la stessa dimensione di quelli del poligono interno (fig. 7) [Schindler et al. 2005].

In effetti, si possono fornire anche numeri interi per tutte le dimensioni di questo schema se assegniamo il lato dell'ottagono pari a 20 unità, il diametro della circonferenza inscritta pari a 48 e la diagonale dell'ottagono 52. Quindi il diametro della circonferenza inscritta nell'esadecagono sarà $48 + 52 = 100$, circa cinque volte il lato. Queste relazioni geometriche derivano direttamente dalla statica generale dello spazio costruito. Le proporzioni sono dovute al triangolo rettangolo 10/12/13, che con sufficiente precisione crea un angolo di $22,5^\circ$ al centro dell'ottagono e una dimensione di 100 per l'esadecagono esterno (fig. 8).

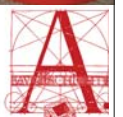
Misurazione della struttura originaria dell'edificio e il "pes romanus capitolinus"
Le dimensioni effettive della Cappella Palatina erano conosciute fin dalla prima campagna di rilievi effettuata nel 2002 dalla cattedra di Storia dell'Architettura della RWTH Aachen

The survey of the hidden but true building edges, 2002



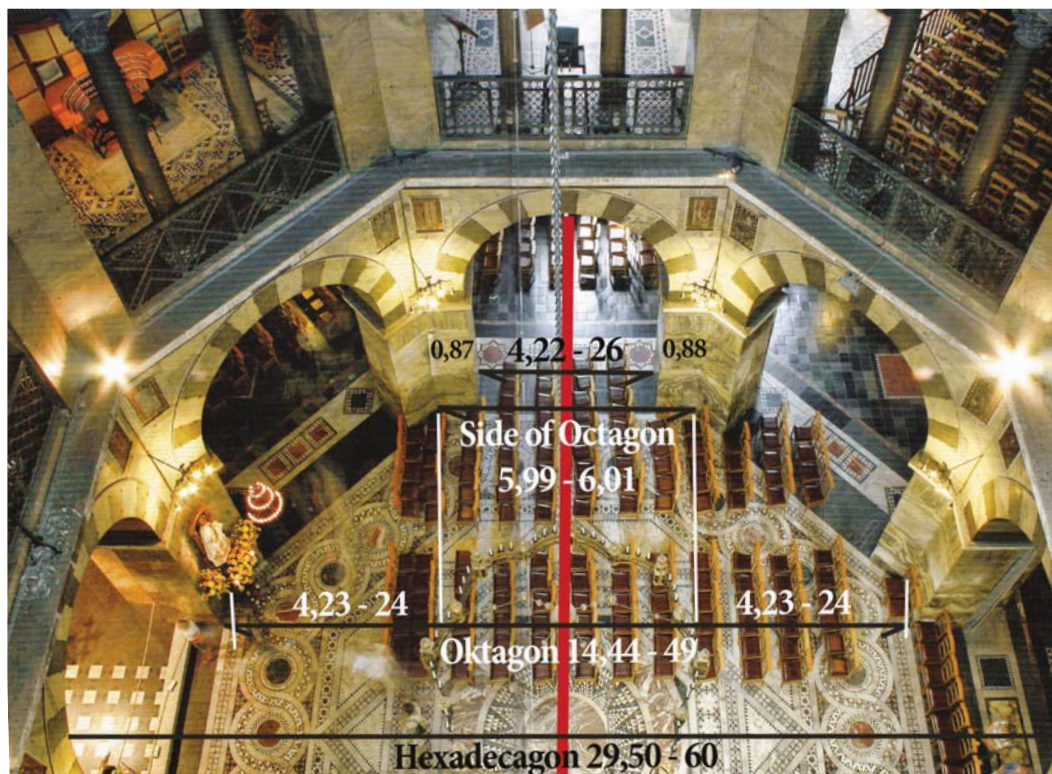
Survey of the Palatine Chapel,
Measurement with two high precision theodolites, Wild. RWTH-Aachen University, 2003.

Institute of History of Architecture, Prof. - Dr. Jan Pieper / Bruno Schindler



10/ Misure dell'ottagono in metri (elaborazione di Bruno Schindler).

The metric dimensions of the octagon (by Bruno Schindler).



University. L'obiettivo di questo rilievo era quello di trovare tracce delle murature originarie oltre il rivestimento in marmo direttamente nella parte centrale, sotto l'imposta delle otto arcate inferiori; questi elementi non erano mai stati misurati in precedenza. Lo studio dell'edificio si era sempre basato su una misurazione manuale eseguita nel 1900 dal precedente capomastro della cattedrale, Joseph Buchkremer, prima delle trasformazioni del 1902.

I risultati di questo nuovo rilievo non si discostavano significativamente dalle misurazioni presenti nei disegni di Buchkremer [Buchkremer 1955]. Tuttavia la nuova misurazione ha incluso tutti gli elementi dell'interno, l'ottagono fino alla sommità della volta e tutti i pilastri e le arcate della galleria che gira intorno all'ottagono centrale. All'epoca le misurazioni erano ancora eseguite con teodoliti meccanici di alta precisione dotati di goniometri analogici. Abbiamo utilizzato dunque il metodo dell'intersezione in avanti utilizzando due strumenti contemporaneamente e un puntatore laser ottico (fig. 9). I risultati delle misurazioni venivano calcolati immediatamente e

validati in tempo reale con un software appositamente predisposto: i dati forniti dai due strumenti erano controllati verificando che la deviazione massima tra le distanze fosse inferiore ai 5 millimetri. L'osservazione e le misurazioni venivano eventualmente ripetute fino al raggiungimento dell'accuratezza stabilita. La nuvola 3D di allora comprendeva circa 480 punti, la maggior parte dei quali erano stati misurati due volte e quindi da quattro posizioni per ciascun punto. Il riversamento dei dati nel software CAD ha mostrato che l'ottagono originale ha un diametro di 14,44 m alla base e di 14,50 m alla sommità del tamburo, escludendo il rivestimento moderno in marmo (fig. 10). I lati dell'ottagono, che sottendono gli angoli del poligono di 135° di ampiezza, non risultano esattamente uguali, e la loro misura varia tra 5,94 m e 6,02 m. I pilastri ad angolo a sinistra e a destra delle aperture degli archi misurano da 0,87 m a 0,90 m, mentre la luce degli archi varia da 4,21 m a 4,23 m, ad eccezione di quello a nord, che misura 4,25 m. Solo per i pilastri dell'ottagono e dell'ambulacro siamo stati in grado di rilevare e misurare gli

a concentric scheme consisting of two tension rings, an octagon and a hexadecagon connected with concentric walls. They counteract with the compression resistance of the masonry the radial thrust: the static diagram shows the doubling of a central polygon from eight to sixteen.

The scheme is immediately understandable to everyone for the transition of a hexagon to a hexadodecagon with squares and equilateral triangles. For the polygonal doubling of the octagon to sixteen sides, the characteristic triangle is from the octagon and we find it symmetrically behind the corners of the polygon in order to achieve the same dimension for all sides of the outer and inner polygon (fig. 7) [Schindler et al. 2005].

In fact, whole numbers can also be given for all the lengths of the sides for this scheme if the octagon side is given as 20 and the octagon diameter as 48. The diagonal then gives 52 and thus the diameter of the hexadecagon $48 + 52 = 100$, around five times the side size. These geometric relationships result directly from the general statics of the building space. The proportions are due to the right-angled triangle 10/12/13, which with sufficient precision gives the 22.5° angle for the octagon and the dimension 100 for the outer hexadecagon (fig. 8).

Measurement of the original building fabric and the 'pes romanus capitolinus'

The actual dimensions of the Palatine Chapel were known since an initial surveying campaign by the Chair of Building History at RWTH Aachen University in 2002. The aim of this survey was to find traces of the original walls behind the marble cladding directly under the impost profiles of the eight lower arcades in the center. Never these components had been measured before. Building research had always relied on a hand measurement by the former cathedral master builder Joseph Buchkremer, he did in 1900 before the transformations of 1902. The results of the new survey were not significantly different from the individual measurements in Buchkremer's sketches [Buchkremer 1955]. Nevertheless, the new measurement included all the components of the interior, the octagon up to the summit of the vault and all the pillars and arcades one can find in the gallery around the central

11/ Misure dell'ottagono in piedi (elaborazione di Bruno Schindler).
The feet dimensions of the octagon (by Bruno Schindler).

octagon. At that time, measurements were still taken with some high precision but mechanical theodolites with analog circular graduations. We used two devices simultaneously and an optical laser pointer for the incision method (fig. 9). The measurement results were immediately calculated and evaluated for accuracy by a specially programmed software: the bearings of both devices were checked for the shortest distance of deviations, which had to be below the 5-millimeter mark. Observation and measurement were repeated until the required accuracy was achieved. The points cloud comprised in those days around 480 points, most of which were measured twice and thus measured from a total of four positions. The evaluation in the CAD program resulted in the original octagon the original diameter without modern marble cladding of 14.44 meters at the bottom to 14.50 meters at the top of the tambour (fig. 10). The octagon sides between the 135° polygon angles yielded a somewhat vague measurement of between 5.94 and 6.02 meters. The corner pillars to the left and right of the arch openings measure 0.87 to 0.90 meters, the arch openings open 4.21 to 4.23 meters, except the north one with 4.25 meters. Only for the pillars in the octagon and in the ambulatory we were able to detect and measure the traces of the original stone edges behind the modern marble. It was only there, that we were able to determine a repeating precision of the architecture. The walls of the surrounding hexadecagonal ambulatory were built much less precisely, with deviations of up to 0.20 meters. Only the precision of the inner diameter of the whole round church (29.48 to 29.60 meters) matches the precision of the octagon in the middle: it is exactly 100 roman pedes capitolini (29.48 - 29.60 cm).

Analysis in *pes romanus* of the original construction dimensions and their distribution in the building

Using the unit of measurement *pes capitolinus* (pr), the octagon diameter could be reconstructed as exactly 49 pr, even though the interior of the octagon widens slightly towards the top (up to 49.2 pr), as is usual under stone vaults with outward thrust. There is a deviation from SW to NE with +6 cm.

spigoli originali della pietra dietro il marmo moderno. Solo in questo caso siamo riusciti dunque a mettere in luce la precisione dell'architettura attraverso un metodo accurato e ricorsivo. I muri dell'ambulacro esadecagonale esterno sono stati realizzati con una accuratezza molto minore, con deviazioni che arrivano a 0,20 m. Solo il diametro interno della chiesa (29,48-29,60 m) corrisponde alla precisione dell'ottagono centrale: è esattamente 100 *pedes capitolini* romani (1 *pes* = 29,48-29,60 cm).

Analisi in *pes romanus* delle dimensioni originali e della loro distribuzione nell'edificio

Utilizzando l'unità di misura del *pes capitolinus* (pr), la larghezza dell'ottagono è stata ricostruita come pari esattamente a 49 pr, anche se all'interno questo si allarga leggermente verso l'alto (fino a 49,2 pr), come spesso accade a causa della spinta verso l'esterno delle volte in pietra. C'è una deviazione da sud-ovest a nord-est di +6 cm. Le facce dei pilastri angolari misurano, con una certa imprecisione, 3 pr. Il lato dell'ottagono è di 20,3 pr e pertanto la luce dell'arco corrispondente è di 14,3 pr (fig. 11). La misura dell'ottagono centrale è più precisa di quanto riscontrato per i singoli lati del poligono nella misurazione degli archi e dei pilastri: ciò fa pensare che, quando sono state eseguite le misurazioni per il tracciamento

dell'edificio, l'ottagono sia stato misurato con grande precisione e che gli archi siano stati posizionati solo in un secondo momento. Gli archi sono distribuiti in modo che quelli di luce maggiore vengono a trovarsi in corrispondenza degli assi principali est-ovest e nord-sud. L'arco a est, che ha una luce di 14,35 pr, è più ampio di quello a ovest, mentre il più ampio risulta essere quello a nord, la cui luce è pari a 14,4 pr. Evidentemente, la misura dei lati del poligono non necessitava, in origine, di grande precisione. Anche le dimensioni dei pilastri d'angolo risultano meno esatte, e possono essere ricondotte con una certa approssimazione a 3 pr (2,9-3,1 pr). La luce dei singoli archi, invece, è stata misurata con maggiore cura dal centro di ogni lato del poligono. Essendo tale ampiezza misurabile in 14,3-14,4 pr, rimanevano esattamente 3 pr per i pilastri d'angolo a destra e a sinistra, misura che non sempre risulta verificata. Per tutte le dimensioni, si nota che una suddivisione decimale del *pes romanus capitolinus* corrisponde molto accuratamente alle deviazioni dalle misure intere [Chouquer, Favory 2001]. Questa insolita partizione del piede in decimi ($pr/10 = 2,95$ cm) costituiva tuttavia la consueta unità di misura del *pede de St. Hubert* fin dalla fondazione carolingia della città di Liegi, sulla Mosa, nell'VIII secolo ad opera del bisnonno di Carlo Magno, Pipino il Vecchio [Thomassin 1802]. La città si trova



in Belgio, 40 km a ovest di Aachen. Non lontano da lì, a meno di un'ora a piedi verso valle, si trova Herstal, il palazzo di "famiglia" della dinastia carolingia, dove il piccolo Carlo trascorse la sua infanzia.

La sequenza delle misure dell'ottagono teoricamente esatta

Il fatto di poter ritrovare, oltre il rivestimento in marmo, dimensioni misurabili in *pes romanus capitolinus*, lascia pensare di poter ricostruire anche quelle perdute nelle trasformazioni del 1905 sulla base della successione di misure accertate come esistenti al tempo: mediante aggiunte e sottrazioni, dalle dimensioni che abbiamo verificato essere originali si ottengono dimensioni altrettanto esatte.

Aggiungendo alla misura dello spazio interno all'ottagono centrale (49 pr) gli spessori dei due muri da 3,5 pr si ottiene una misura pari a 56 pr, misura che si confronta con quella della muratura esterna della chiesa, definita dal poligono a 16 lati (100 pr). La differenza (44 pr) deriva dai 22 pr della profondità delle campate della galleria inferiore, profondità che diventa di 22,5 pr nel caso della galleria al primo piano, a causa del diverso spessore del muro al livello superiore, pari a 3 pr. Se dalla dimensione dell'ampiezza dello spazio centrale (49 pr) andiamo a sottrarre la misura del lato (20,3 pr) otteniamo un valore di 28,7 pr che, diviso per due, fornisce un valore di 14,35 pr per la proiezione dei ciascuno dei lati inclinati dell'ottagono. La geometria dell'ottagono dovrebbe essere qui definita numericamente con la formula $\sqrt{2} = 20,3 \text{ pr} : 14,35 \text{ pr} = 1,414$.

Da quanto detto appare evidente che la luce degli otto archi che si trovano al centro di ogni lato dell'ottagono e che misura 14,3 pr (con un errore quindi pari a 1,5 cm) è stata pensata esattamente uguale a quei segmenti di 14,35 pr, proiezioni dei lati inclinati dell'ottagono, e che quindi il diametro della circonferenza inscritta nell'ottagono stesso non è altro che la somma di una serie di misure: $49 \text{ pr} = 14,33 + 3 + 14,33 + 3 + 14,33 \text{ pr}$.

Al centro di questa sequenza si trova il lato dell'ottagono, nell'ipotesi che a ogni pilastro fosse attribuita una dimensione di 3 pr: $20,33 \text{ pr} = 3 + 14,33 + 3 \text{ pr}$.

È evidente che l'apertura voltata che insiste sul lato del poligono determina con estrema precisione le proporzioni degli archi. È significativo che durante le indagini archeologiche sugli spiccati delle fondazioni siano state trovate incisioni per un'apertura voltata, poi non utilizzata, esattamente di 14 pr (fig. 12) [Schaub 2011]. Questo ritrovamento ci fa ipotizzare che, prima di avviare la costruzione, i progettisti abbiano effettuato indagini preliminari in base alle quali, dopo un attento esame, fu infine costruito con precisione un arco di quasi 14,35 pr al centro dei lati di 20,3 pr, dell'ottagono con conseguenti pilastri di 2,975 pr anziché 3 pr (3 pr = 87,7 cm, valore medio delle dimensioni di tutti i pilastri, come osservato da Buchkremer).

Metodo moderno di analisi delle dimensioni dell'ottagono, regola storica della $\sqrt{2}$

Si vuole qui evidenziare il fatto che le dimensioni dell'ottagono della Cappella Palatina di Aachen possono essere completamente definite fino a 1/10 pr (o 1/20 pr) per ciò che riguarda la geometria del poligono: si tratta di un calcolo che regge all'analisi scientifico-matematica moderna di $\sqrt{2}$ utilizzando l'algoritmo di Euclide [Euclide VII - 2].

Le due dimensioni necessarie per la costruzione dell'ottagono, quelle del lato del quadrato circoscritto e del lato dell'ottagono stesso, danno luogo a un rapporto irrazionale (fig. 13): $(\sqrt{2} + 1)/1 = 2 + \text{resto}$, (a) = $(\sqrt{2} - 1)$, il resto (a) equivale a 0,414... e $1/(\sqrt{2} - 1) = 2 + \text{resto}$, (a+1) = $(3 - 2\sqrt{2})$, il resto (a+1) equivale a 0,172... e in generale $\text{resto}(n) / \text{resto}(n+1) = 2 + \text{resto}(n+2) \dots$

Questa successione di calcoli deriva sempre dal quoziente 2 e dal decrescente resto successivo: il resto che sempre si produce, per quanto piccolo, fa sì che $\sqrt{2}$ sia un valore irrazionale perché non raggiunge mai lo 0. Questa proprietà irrazionale di $\sqrt{2}$ nella geometria dell'ottagono può essere verificata con grande precisione anche mediante approssimazioni razionali, come le dimensioni di 49,0 pr e di 20,3 pr ridotte di un fattore 7, cioè considerando $7 \times 7,0 \text{ pr} / 7 \times 2,9 \text{ pr}$, che possiamo an-

The corner pillars are measured somewhat inaccurately at 3 pr. The polygon side of the octagon is at 20.3 pr and thus the derived arch openings 14.3 pr (fig. 11). The central octagon is more precise than the subdivisions of the polygon sides with pillars and arches: when measuring on the historical building site, the octagon was apparently first determined very precisely and only then, in a second step, the varying arch openings were determined. These different arch openings are distributed with larger spans on the main axes in an east-westerly and north-south direction. At 14.35 pr, the arch in the east is larger than the arch in the west. At 14.4 pr, the northern arch exceeds all others. The measurements for the polygon sides apparently was initially not very necessary. Even the dimensions of the corner pillars are less precise, which today can only be reconstructed very imprecisely at 3 pr (2.9 to 3.1 pr). Instead, the arch openings were apparently measured carefully from the center of each side of the polygon at 14.3 to 14.4 pr, on the assumption that exactly 3 pr would remain for the rest, left and right for the corners of the pillars, which was not always the case.

For all measurements, it is always noticeable that a decimal subdivision of the pes capitolinus describes the deviations from the whole foot measurements very precisely [Chouquer, Favory 2001]. This unusual division of foot into tenths (= 2.95 cm) was the usual unit of measurement of the pied de St. Hubert since the Carolingian foundation of the city of Liège on the Meuse in the 8th century by Charlemagne's great-grandfather Pippin the Older [Thomassin 1802]. Not far from there, less than an hour's walk downstream, lies Herstal, the Carolingian family palace, where little Charle spent his childhood (Belgium, 40 Km west from Aachen).

The theoretically exact measure sequences of the octagon

It is clear that with all the building dimensions still found behind the marble cladding in roman pes capitolinus, the attempt should also succeed in reconstructing the dimensions lost in the 1905 transformations with the help of the once real existing measure sequences: sums and differences of secured exact original dimensions

12/ Incisioni nello spiccatto di fondazione (foto di Bruno Schindler; autorizzazione Dombauamt 2012).
Incisions in the foundation crown (photo by Bruno Schindler; authorization 2012 of Dombauamt).

result in comparably exact dimensions. The span of the octagon (49 pr) and additionally the wall sections (3.5 pr) result in an extension of the central octagon to 56 pr that has place in the center of the outer sixteen-sided outer wall circle (100 pr) of the church. The difference (44 pr) results in 22 pr for the depth of the bays of the lower gallery and 22.5 pr for the upper gallery because of the top wall of 3 pr.

In the central octagon, the difference between the span (49 pr) of the central church space and the dimension of the octagon side (20.3 pr) is 28.7 pr and its halving is 14.35 pr for the laterally slanted sides in the octagon. The geometry of the octagon should be numbered here with

$$\sqrt{2} = 20.3 \text{ pr} : 14.35 \text{ pr} = 1.414.$$

When considering this, it is noticeable that the eight arch openings in the centers of the polygon sides with 14.3 pr (except for 1.5 cm) were measured exactly the same as the 14.35 pr slanted sides of the octagon and the diameter of the octagon is actually only the sum of a measure sequence:

$$49 \text{ pr} = 14.33 + 3 + 14.33 + 3 + 14.33 \text{ pr}.$$

In the center of this measure sequence is the octagon's side, with the premise that each pillar was granted 3 pr:

$$20.33 \text{ pr} = 3 + 14.33 + 3 \text{ pr}.$$

It is obvious that the arch opening in the polygon side very sensitively determines the proportions of the arches. It is significant that during archaeological probing on the foundation crowns, carvings for a deviating arch opening of exactly 14 pr were found (fig. 12) [Schaub 2011]. The find proves that we must assume preparatory investigations by the planning builders before they started with construction, according to which, after careful examination, an arch of quasi 14.35 pr was finally built very precisely in the middle of the octagon sides of 20.3 pr, resulting in pillars of 2.975 pr instead of 3 pr (= 87.7 cm, the statistical average of all pillars as seen by Buchkremer).

Modern method of analyzing the dimensions of the octagon, historical rule for $\sqrt{2}$

We would like to point out here that the dimensions of the octagon of the Aachen

che tradurre in decimi di pr come 70/29:
 70 : 29 = 2 e resto 12

29 : 12 = 2 e resto 5

12 : 5 = 2 e resto 2

5 : 2 = 2 e resto 1,

e così via, fino all'ovvio prodotto del valore razionale di $2 : 1 = 2 + 0$ per questa successione di calcoli.

Applicato all'apertura ad arco, questo risultato diventa

$$(70 - 29) : 2 = 41 : 2 = 20,5$$

e quindi sette volte 143,5 decimi di pr, ovvero 14,35 pr. Questo determina un pilastro di 2,975 pr negli angoli, come illustrato sopra (29,48 cm per il pr e 14,445 m per il diametro medio della circonferenza inscritta nell'ottagono).

L'unica fonte storica antica che conosciamo riguardante il rapporto 70/29 (99/70 nella serie euclidea) è rappresentata da Erone di Alessandria [Svenshon 2008; Svenshon 2010]. Erone propose la seguente formula per il calcolo di $\sqrt{2}$:

$$(7 + 1/14) : 5 = (99/14) : (70/14),$$

cioè $\sqrt{2} = 99 : 70 (= 1,414)$, [invece del meno preciso $\sqrt{2} = 7 : 5$, cioè $1,400 < \sqrt{2} = 1,414\dots$].

Da questo valore possiamo derivare direttamente: $(\sqrt{2} - 1) / 1 = (99 - 70) / 70 = 29 : 70$

e quindi la sequenza delle misure di 70 : 29 nell'ottagono [Pieper, Schindler 2017, pp. 206-211].

Il problema di salvaguardare la precisione delle dimensioni dell'edificio nel processo di costruzione

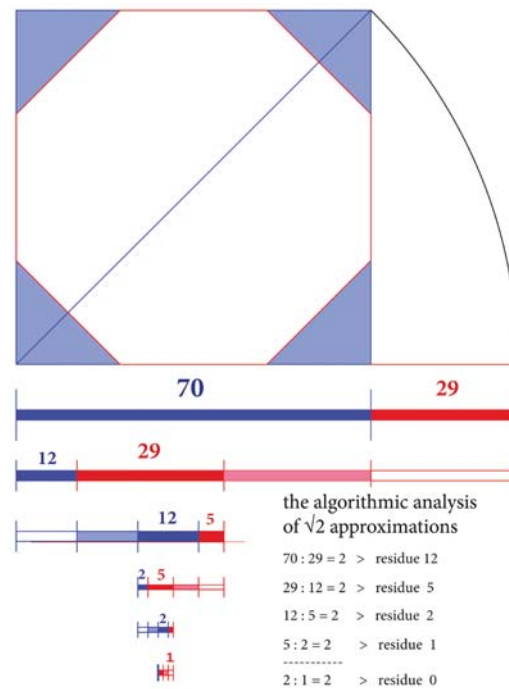
Come abbiamo specificato, la geometria alla base di tutte queste misure deriva dalle linee di forza dell'edificio, suggerendo un modello che sarebbe stato costruito a partire dal centro: la misura comune di 20 pr per il lato dell'esadecagono esterno con un diametro di 100 pr, per la circonferenza inscritta che va ad estendere quello dell'ottagono di 48 pr, con $48 = 14 + 3 + 14 + 3 + 14$, ovvero con una luce di 14 pr, come documentato archeologicamente per gli allineamenti degli archi incisi sullo spiccatto di fondazione (fig. 12). Ciò dimostra che il raddoppio del poligono in piedi interi era considerato puramente geometrico per la dimensione realizzata di 100 pr dell'esadecagono [Pieper, Schindler 2017, pp. 135-142]. Pertanto ci fu una verifica preliminare per i pilastri e gli archi dell'ottagono centrale. Tuttavia, le dimensioni dell'ottagono furono aumentate da 48 pr a 49 pr e, conseguentemente, il lato dell'ottagono da



20 pr a 20,3 pr, così come la luce dell'arco da 14 pr a 14,35 pr, utilizzando la sequenza di misure correlate a $\sqrt{2}$ che abbiamo già visto: $49 = 14,35 + 2,975 + 14,35 + 2,975 + 14,35$. Questa ulteriore operazione consentì ai mastri costruttori di distaccare leggermente la suddivisione interna dell'ottagono da quella dell'esadecagono esterno al fine di ottenere un miglior adeguamento alle proporzioni di $\sqrt{2}$ e di poter eseguire questo processo con estrema sensibilità e una precisione di 1/20 pr (1,5 cm) [Pieper, Schindler 2017, p. 143]. Durante i lavori di costruzione al centro dell'edificio della chiesa, dove si stavano effettuando lavori di scavo o venivano trasportati materiali pesanti per completare le fondazioni, sarebbe stato quasi impossibile proteggere i segni relativi alle misure. I punti di riferimento venivano quindi collocati in maniera più opportuna, al di fuori dell'area di costruzione, in modo che i dati di misurazione necessari potessero essere recuperati in qualsiasi momento dalle coordinate segnate all'esterno con picchetti, utilizzando occasionalmente corde tese al centro del cantiere. Ciò suggerisce la distribuzione altrimenti arbitraria di misurazioni esattamente ripetute nella struttura, in particolare il diametro dell'ottagono di 49 pr.

Ricostruzione della misurazione sul cantiere storico e il diagramma di misurazione

Il diagramma di misurazione corrispondente alle dimensioni dell'edificio¹ può essere ricostruito utilizzando due grandi quadrati con picchetti misurati con precisione su ogni lato (fig. 14) [Hyginus 800]. Nella nostra sperimentazione di misurazione del 2017, abbiamo testato con successo questo diagramma e il metodo associato per verificarne la praticabilità con una stadia di misurazione o canna di 12 pr (secondo Isidoro di Siviglia; cfr. Isidorus 1911). Inoltre, abbiamo segnato il risultato delle misurazioni con sabbia bianca per visualizzare la pianta risultante dall'applicazione di detto metodo (figg. 2, 3); il risultato è stato quello di un'immagine plausibile con dimensioni identiche a quelle dell'edificio originale. Partendo dal centro dell'edificio, entrambi gli assi principali erano allineati esattamente con i quattro punti cardinali. Il primo quadrato da



misurare era quello ruotato. Le semidiagonali di 84 pr furono misurate dal centro verso i vertici, cioè 7 x 12 pr della stadia di misurazione. I lati del quadrato misuravano circa 7 pr x 17 pr = 119 pr. I loro centri furono poi misurati dai quattro vertici, segnando ciascuno con 5 pr x 12 pr = 60 pr sempre leggermente oltre il centro per determinare il punto esatto tra le due misure. Era sufficiente interpolare l'insieme di questi centri per ottenere gli altri due assi dell'ottagono e determinare il secondo grande quadrato nello stesso modo. A questo punto, dall'intersezione dei due quadrati risultava un ottagono con lati pari esattamente a 49,2 pr (fig. 14)! Sui lati del quadrato, tuttavia, a partire dal loro punto medio, sono stati misurati solo 24,5 pr, cioè esattamente un segmento di 49 pr.

Dal momento che le sezioni trasversali dei picchetti di rilevamento erano esattamente 0,2 pr = 2/10 pr, con gli otto picchetti ai vertici del diagramma era possibile far sì che gli allineamenti delle corde si adattassero perfettamente all'ottagono dell'edificio! In particolare, questo è proprio uno dei risultati confermato dall'analisi della scansione effettuata dalla Sapienza Università di Roma. Gli step successivi della misurazione potevano quindi essere ese-

Palatine Chapel can be specified completely in 1/10 pr (or 1/20 pr) for the geometry of the polygon: It is a calculation that stands up to today's mathematically scientific analysis of $\sqrt{2}$ using Euclid's algorithm [Euclid VII - 2]. The two construction dimensions of the octagon, the diameter and the side, form an irrational ratio (fig. 13):

$(\sqrt{2} + 1)/1 = 2 + \text{residue}$, $(a) = (\sqrt{2} - 1)$, the residue (a) equals to 0.414... and $1/(\sqrt{2} - 1) = 2 + \text{residue}$, $(a+1) = (3 - 2\sqrt{2})$, the residue $(a+1)$ equals to 0.172... and in general residue $(n) / \text{residue } (n+1) = 2 + \text{residue } (n+2) \dots$

This calculation cascade always results from the quotient 2 and the next smaller residue: the permanent resulting tiny residue makes $\sqrt{2}$ an irrational value because it never reaches 0.

This irrational property of $\sqrt{2}$ in octagon geometry can also be verified very precisely with rational approximations like the dimensions 49.0 pr and 20.3 pr after reduction by 7, i.e. with $7 \times 7.0 \text{ pr} / 7 \times 2.9 \text{ pr}$, as with $70 / 29$ tenths pr:

$70 : 29 = 2$ and residue 12

$29 : 12 = 2$ and residue 5

$12 : 5 = 2$ and residue 2

$5 : 2 = 2$ and residue 1,

and thus the obvious end of this calculation cascade for the rational value $70 : 29$.

The result for the arch opening is $(70 - 29) : 2 = 41 : 2 = 20.5$ and therefore seven times: 143.5 tenths pr, i.e. 14.35 pr This leaves the pier with 2.975 pr in the corners, as already described above (29.48 cm for the pr and 14.445 meters for the average octagon diameter).

The only early historical sources, we know about $70/29$ (99/70) is Heron of Alexandria [Svenshon 2008; Svenshon 2010]. He gave in antiquity the following instruction for the calculation of $\sqrt{2}$,

$(7 + 1/14) : 5 = (99/14) : (70/14)$,

i.e. $\sqrt{2} = 99 : 70 (= 1.414)$, [instead of inaccurately $\sqrt{2} = 7 : 5$, i.e. $1.400 < \sqrt{2} = 1.414 \dots$].

From this value we can directly derive $(\sqrt{2} - 1) / 1 = (99 - 70) / 70 = 29 : 70$ and thus the measure sequences of $70 : 29$ in the octagon [Pieper, Schindler 2017, pp. 206-211].

14/ Lo schema delle misure intorno alla struttura (elaborazione di Bruno Schindler).

The measurement diagram around the building structure (by Bruno Schindler).

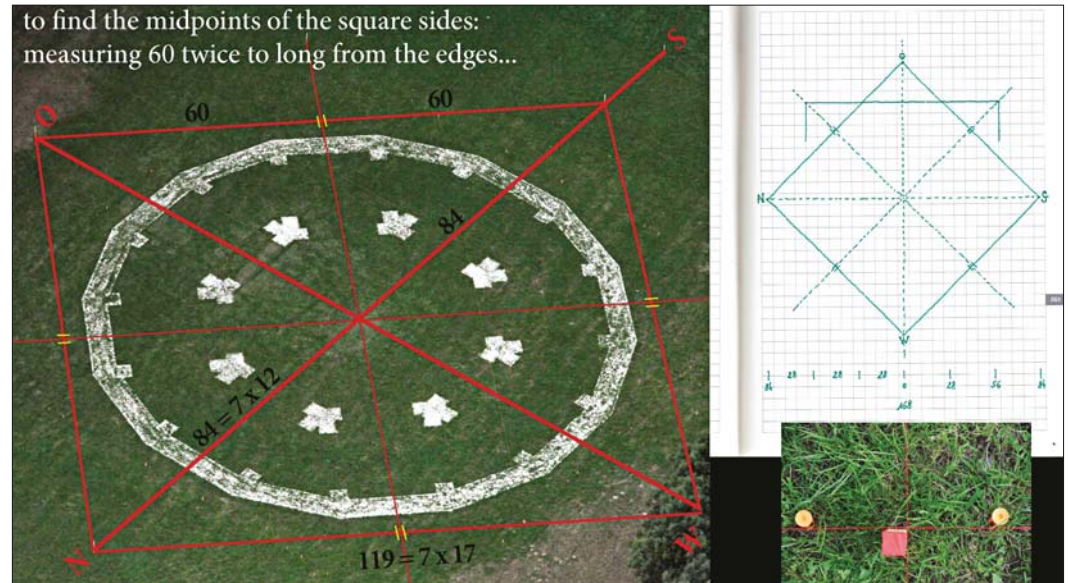
15/ Il pattern geometrico e le dimensioni verticali dell'ottagono (elaborazione di Bruno Schindler).

The geometric pattern and the vertical dimensions of the octagon (by Bruno Schindler).

The problem of securing the precise building dimensions during the building process

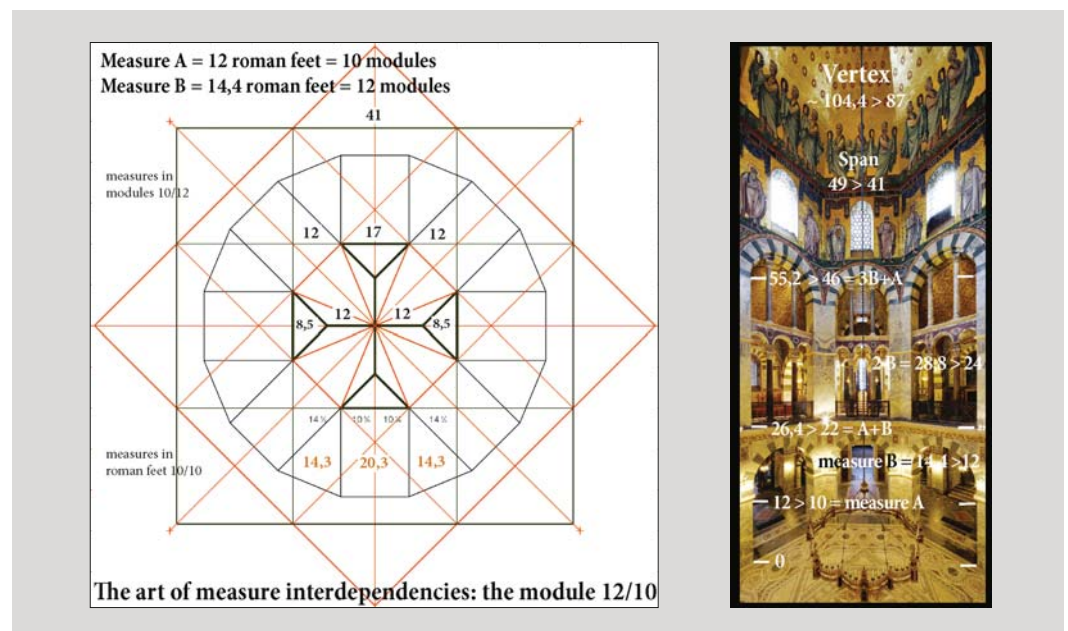
As we mentioned, the geometry behind all that measures derives from the lines of force of the building suggesting a pattern that would all have been constructed from the center: the commune 20 pr side of the outer hexadecagon with 100 pr diameter doubling of the octagon with 48 pr, with $48 = 14 + 3 + 14 + 3 + 14$, i.e. with an arcade of 14 pr, as has been archaeologically documented for the engraved arch alignments on the foundation crown (fig. 12). This proves that the doubling of the polygon in whole feet was considered purely geometrical for the executed 100 pr dimension of the hexadecagon [Pieper, Schindler 2017, pp. 135-142]. Thus, there was a first premeditation for the pillars and arches of the central octagon. However, the dimensions of the octagon were increased from 48 pr to 49 pr and thus the octagon side from 20 pr to 20.3 pr, as well as the arch opening from 14 pr to 14.35 pr, with the known measure sequence related to $\sqrt{2}$, $49 = 14.35 + 2.975 + 14.35 + 2.975 + 14.35$. This additional operation enabled the master builders to slightly detach the inner subdivision of the octagon from the outer hexadecagon in order to achieve a better adjustment to the proportions of $\sqrt{2}$ and to execute this extremely sensitively with a 1/20 pr (1.5 cm) accuracy. [Pieper, Schindler 2017, p. 143].

In the middle of the construction work in the center of the church building, where either excavation work was being carried out or heavy stone material was being transported for the completion of the foundations, it was almost impossible to protect such precise markings of the measurements there. Reference points were therefore better set outside the actual construction process so that the necessary measurement data could be retrieved at any time from the coordinates marked on the outside with pegs using occasionally tensioned ropes in the middle of the construction site. This suggests the otherwise arbitrary distribution of precisely repeated measurements in the structure, in particular the diameter of the octagon of 49 pr.



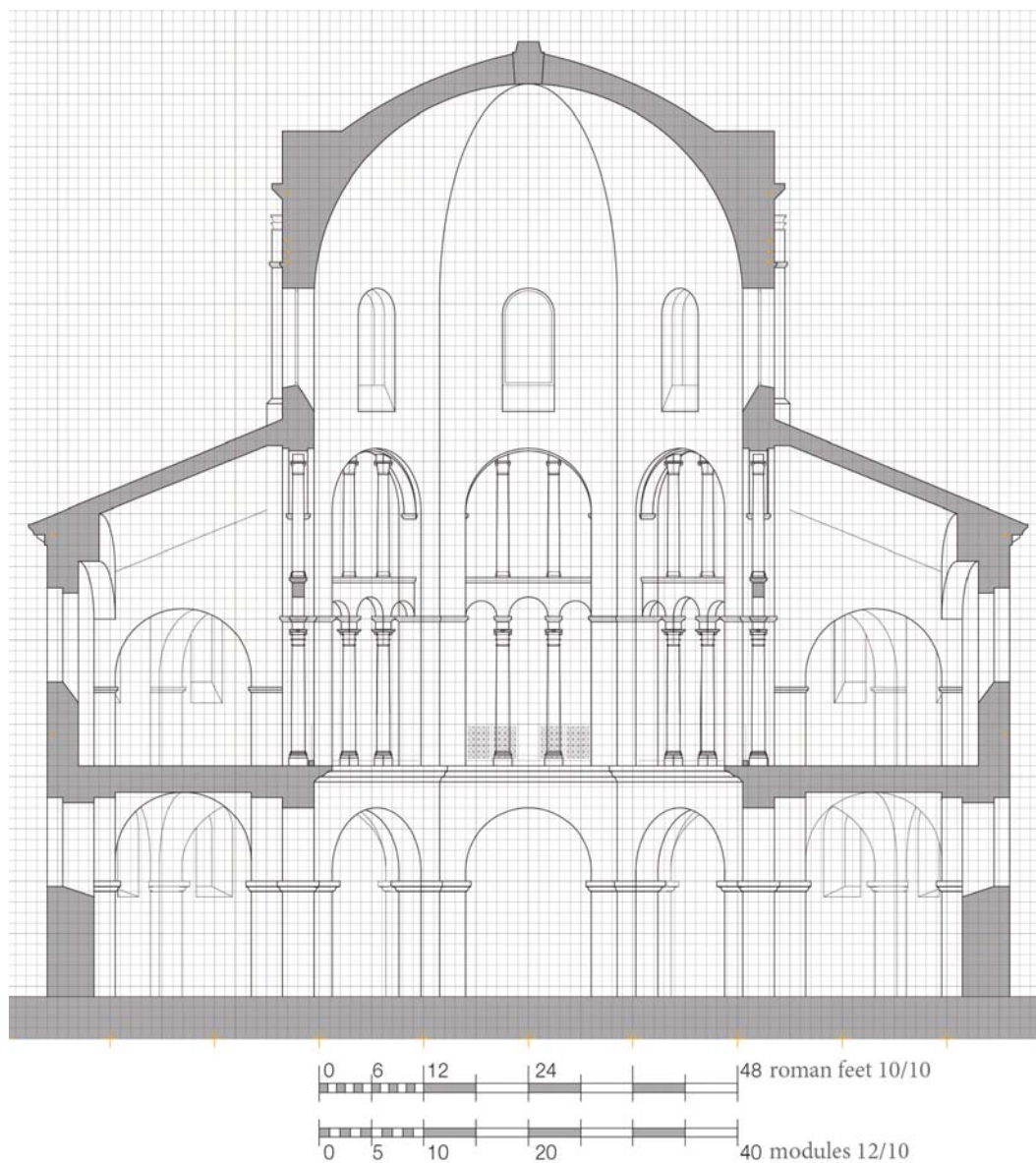
guiti tutti sulle linee laterali dei due quadrati, sempre partendo dai punti medi dei lati. Perfino la misura del diametro della circonferenza inscritta nell'esadecagono pari a 100 pr e l'aggiunta di 5 pr per la sezione trasversale del muro esterno, arrivando a una valore totale di 110 pr per l'intero edificio centrale con 22 pr per ciascuno dei sedici lati esterni. È interessante notare che la tolleranza è sempre dell'ordine di 1,5 cm (1/20 pr). La sezione

trasversale inferiore del muro dell'ottagono misura esattamente 3,5 pr (1,03 m), il che si adatta al modulo generale dello schema di misurazione che adotta multipli di 7 pr. Ciò significa che il diametro del nucleo ottagonale della Cappella Palatina di Aachen misura esattamente 56 pr (16,51 m) alla base, per effetto della riduzione della sezione del muro e 55 pr (16,21 m) alla sommità. In alto troviamo un ottagono centrale di 55 pr visibile dall'esterno,



16/ Interno dell'ottagono in pes agrimensorum
(elaborazione di Bruno Schindler).

*Interior view of the octagon in pes agrimensorum
(by Bruno Schindler).*



che emerge dall'esadecagono di 110 pr (32,43 m), misura che è due volte l'ampiezza dell'ottagono: quello che si ottiene è uno schema di continue operazioni di bisezione nella struttura volumetrica della chiesa!

L'elevazione nello spazio centrale ottagonale
Focalizzando l'attenzione sull'architettura², l'ottagono centrale mostra solo un numero esiguo di elementi strutturali. Pochi riferimenti formali forniscono informazioni sull'ordine dimensionale, che tuttavia è

stato specificato con grande precisione dai dati del rilievo del 2002 tradotti nel sistema decimale del *pes* romano (fig. 15). C'è una successione verticale quasi ininterrotta lungo gli otto spigoli verticali che insistono sui vertici dell'ottagono, dal piano terra fino alla sommità. Una pesante cornice in travertino interrompe questa verticalità e chiude le arcate inferiori a 26,35 pr sopra il livello del piano inferiore, utilizzato esclusivamente dai sacerdoti per la celebrazione delle messe presso diversi altari all'epoca

Reconstruction of the measurement on the historic construction site and the measurement diagram

The measurement diagram matching the building dimensions¹ can be reconstructed using two large squares with pegs precisely measured on either square side (fig. 14) [Hyginus 800]. In our measurement experiment in 2017, we were testing successfully this diagram and the associated measurement method for its practicability with a measuring bar or canna of 12 pr (according to Isidore of Seville; Isidorus 1911). In addition, we marked the result of the measurements with white sand to visualize the floor plan resulting from the measurement method (figs. 2, 3); the result was a plausible image with identical dimensions of the original building.

Starting from the center of the building, both main axes were aligned exactly to the four cardinal points. The first square to measure was the twisted one. The half-diagonals of 84 pr were measured from the center to the corners, i.e. 7 pr x 12 pr of the measuring bar. The sides of the square measure approximately 7 pr x 17 pr = 119 pr. Their centers were then measured from the 4 corners, marking each with 5 pr x 12 pr = 60 pr always slightly beyond the very center in order to determine the exact middle between the two measured values. It was sufficient to join these interpolated centers to obtain the other two axes of the octagon and to determine the second large square in the same way. The intersection of both squares now results in an octagon with sides of exactly 49.2 pr (fig. 14)! On the square sides, however, only 24.5 pr, i.e. exactly 49 pr, are measured starting from the center of the square sides. If the cross-sections of the surveying pegs were exactly 0.2 pr = 2/10 pr, then with the 8 pegs at the corners of the diagram's octagon, it was precisely possible to fit perfectly the rope alignments of the building's octagon with those pegs! In particular, this is one exact result of the evaluation of the scan of Sapienza University of Rome.

The further measuring steps could then all be carried out on the side lines of the two squares, always from the centers of the square sides. Even the dimension of the hexadecagon of 100 pr and additionally 5 pr each for the cross-section of the outer wall, i.e. 110 pr for

17/ Anonimo, disegno del trono di Carlo Magno nella sua forma originaria (British Museum, Depot of Manuscripts, Add. 6735, fol. 6. Schindler, Pieper 2017, p. 82 fig. 114; pubblicato prima in Keussens 1898, p. 284 e in seguito in Apphun 1962, fig. 4).

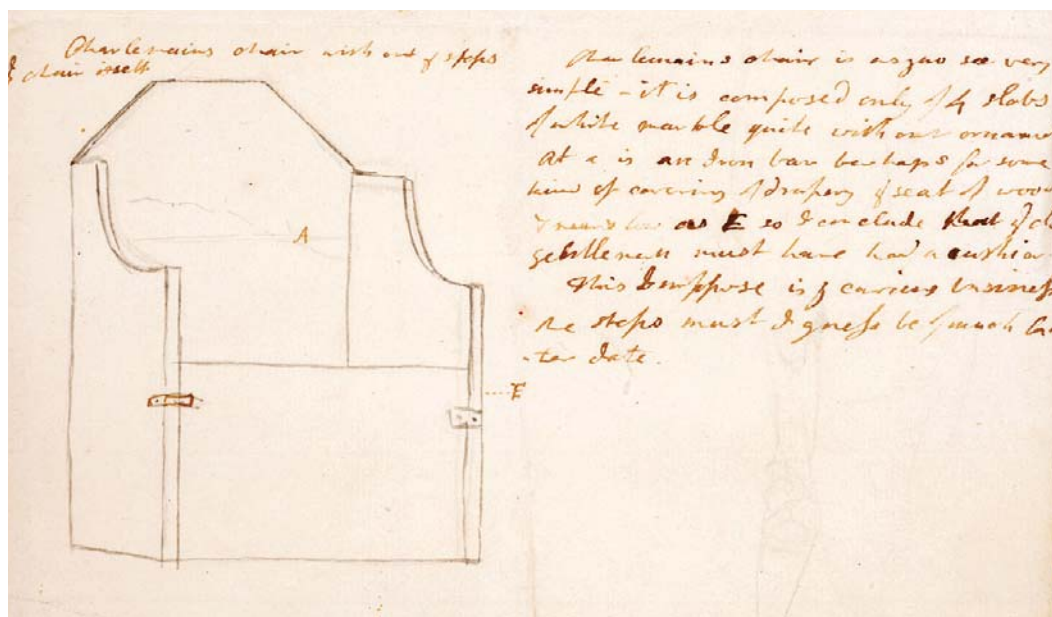
Anonymous, drawing of the Charlemagne throne with its original octagonal shape, 18th century (British Museum, Depot of Manuscripts, Add. 6735, fol. 6. Schindler, Pieper 2017, p. 82 fig. 114; first published by Keussens 1898 p. 284 and later by Apphun 1962 fig. 4).

18/ Il cosiddetto Karlsthron nella Cappella Palatina (foto di Bruno Schindler).
The so-called Karlsthron inside the Palatine Chapel (photo by Bruno Schindler).

the entire diameter of the central building with 22 pr for the sixteen outer sides. It is noteworthy that the tolerances are always in the range of 1.5 centimeters (1/20 pr). The lower wall cross-section of the octagon measures exactly 3.5 pr (1.03 m), which fits the general modularity of the measurement diagram of multiples of 7 pr. This means that the octagonal core of the Aachen Palatine Chapel has a diameter of exactly 56 pr (16.51 m) at the bottom and 55 pr (16.21 m) at the top after the reduction of the wall section. At the top there is a central octagon of 55 pr visible from outside, which rises out of the hexadecagon of 110 pr (32.43 m), which is twice as wide as the octagon: a scheme of continuous bisections was achieved in the volumetric structure of the church!

The elevation in the octagonal central space

In terms of architectural detail, the central octagon shows only a minimum of structural elements.² Only few formal references provide any information about a dimensional order, which was, however, specified with great precision from the data of the 2002 survey translated in the decimal system of the Roman pes (fig. 15). There is an almost uninterrupted vertical course of the eight edges in the corners of the octagon, from the ground floor to the apex of the eight-sided vault. There is a heavy travertine cornice interrupting this verticality and closing the lower arcades at 26.35 pr above the lower floor level, which was used entirely by the priests for the celebration of masses at various altars in Charlemagne's time. Only the western parts were used as entrance. On the floor above, the corner pillars continue to rise and merge directly into the semi-circular arches of the above gallery without any chapter cornice. The transition of those pillars to the arches and to the octagonal tambour above thus remained architecturally undefined but was the place where white travertine stone merged with the final ceiling mosaic at 28.8 pr above the cornice of the ground floor. The vault ceiling reaches its upper apex at 104.4 pr. These are the only confirmed building dimensions that have not been lost because of the 1902 alterations. The lower arcade rests on the capital cornices of the lower octagon corner pillars, which were renewed in the 17th or 18th century but they

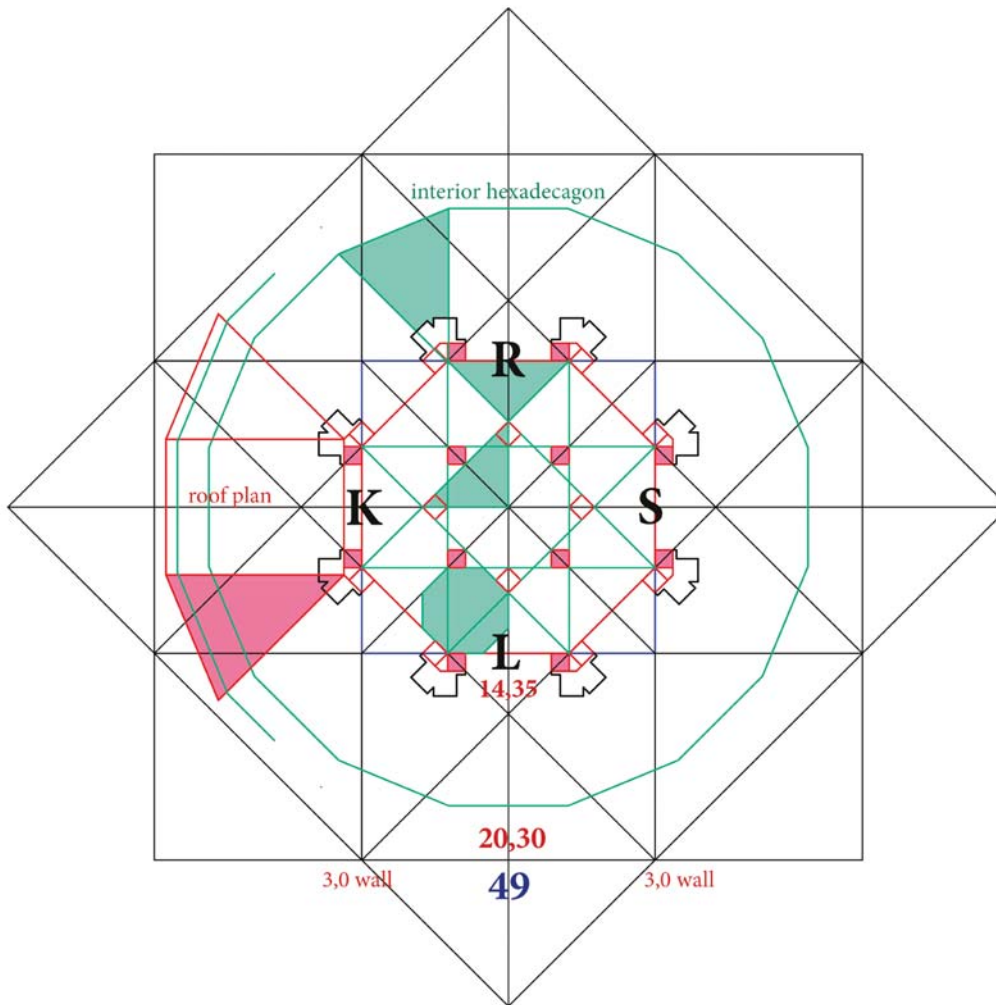


di Carlo Magno e solo la parte occidentale veniva utilizzata come ingresso. Al piano superiore, i pilastri d'angolo continuano a salire e si fondono direttamente con gli archi della galleria superiore senza alcun elemento di separazione. Il passaggio di questi pilastri agli archi e al tamburo ottagonale che si trova al di sopra è rimasto architettonicamen-

te indefinito, ma doveva trovarsi nel punto in cui il bianco travertino si fondeva con il mosaico del soffitto a una quota di 28,8 pr sopra della cornice del piano terra. La chiave della volta è a quota 104,4 pr. Queste sono le uniche dimensioni confermate dell'edificio che non sono andate perdute a causa delle modifiche apportate nel 1902.



19/ Geometria dell'ottagono utilizzata nella Cappella Palatina: ottagono interno ed esterno, esadecagono e copertura (elaborazione di Bruno Schindler).
Geometry of the octagon used for all parts of the Palatine Chapel: interior and exterior octagon and hexadecagon and roof plan (by Bruno Schindler).



Measurement diagram with two squares, diagonals of 168 p.R.
 general geometry of the central octagon architecture
 and Monogramm of Charlemagne

Gli archi del livello inferiore poggiano sulle cornici dei capitelli dei pilastri d'angolo dell'ottagono, che furono rifatte nel XVII o XVIII secolo ma che furono comunque posizionate allo stesso livello dei blocchi di pietra medievali all'altezza originaria di 12 pr. Se osserviamo l'arcata a est che ha una campata di 14,35 pr, possiamo notare che l'altezza del piano inferiore di 26,35 pr è esattamente la somma di 12 pr + 14,35 pr = 26,35 pr. I pilastri del piano superiore sono alti 14,4 pr + 14,4 pr = 28,8 pr, cosicché in quel punto viene raggiunto un livello di 55,15 pr (=

diametro dell'ottagono nella parte superiore, inclusa la sezione del muro). Rimangono esattamente 49,25 pr fino alla chiave, posta a 104,4 pr, equivalente alla campata leggermente ampliata della volta superiore di 14,52 metri. Consideriamo le due dimensioni parziali $A = 12$ pr e $B = 14,4$ pr (o anche 14,35 pr), che in una ingegnosa ripetizione piano inferiore + galleria + diametro dell'ottagono troviamo l'altezza totale interna, ovvero: $(A + B) + (B + B) + (3 \times B + 2 \times A/4) = 104,4$ pr $(12 + 14,4) + (14,4 + 14,4) + (14,4 + 3 + 14,4 + 3 + 14,4) = 104,4$ pr.

were nevertheless set into the same original stone block layer at the original height of 12 pr. If we look at the eastern arched arcade with a span of 14.35 pr, we can see that the lower storey height of 26.35 pr is exactly the sum of 12 pr + 14.35 pr = 26.35 pr. The pillars on the upper floor above look high at 14.4 pr + 14.4 pr = 28.8 pr, so that the level of 55.15 pr is achieved there (= diameter of the octagon at the top, including wall cross-section). Exactly 49.25 pr remain up to the apex at 104.4 pr, i.e. the slightly widened vault span of 14.52 meters at the top.

Let us consider the two partial dimensions $A = 12$ pr and $B = 14.4$ pr (also 14.35 pr), which in a clever repetition first floor + gallery floor + octagon's diameter result in the total height of the interior, i.e. $(A + B) + (B + B) + (3 \times B + 2 \times A/4) = 104.4$ pr $(12 + 14.4) + (14.4 + 14.4) + (14.4 + 3 + 14.4 + 3 + 14.4) = 104.4$ pr. Thus, after comparing both measures A and B using Euclid's algorithm, their greatest common divisor is 2.4 pr is found! This is the common module of all measures of the building, which is also to be defined as 1.2 pr with 12/10 pr in the foot measurement: this module is the pes agrimensorum [Isidorus 1848; Isidorus 1911; Wintermantel 2018], which was largely in use, particular in Ravenna and the Lombard provinces of northern Italy at the time of Charlemagne ([Pieper, Schindler 2017, pp. 212-217].

The pes agrimensorum resulted in a module $M = 12/10$ pr with the following whole module dimensions for the elevation in the octagon (fig. 16):

- Octagon = 41 M (= 49.2 pr in the upper area)
- Polygon side = 17 M
- Corner pillar approximate = 2.5 M
- Corner pillar height = 10 M
- Arc span = 12 M
- Lower arcade height = 18 M
- Lower storey = 22 M
- Gallery pillar height = 24 M
- Upper arcade height = 30 M
- Tambour and vault = 41 M.

Conclusion

Both units of measurement, the Roman pes capitolinus and the northern Italian pes agrimensorum, have a common division of 1/10

pes capitolinus, the Roman foot with decimal division. Charlemagne used the roman foot and the measure practice of Theodoric's reign of northern Italy for his own church building in Aquisgranum (Aachen), the place where the later rulers were to be crowned in his memory. The dimensions of the sixteen-sided ambulatory and the lower wall sections of the octagon record that the building was initially dimensioned with a decimal roman pes capitolinus of 29.48 cm: a wall section of 3.5 pr in the lower octagon of 49 pr diameter and a hexadecagon of 100 pr with a wall section of 5 pr. The measures of the inside elevation shows the proportional perfection of the Lombard building tradition in northern Italy related to the pes agrimensorum of 35.37 cm. The architecture of the Aachen Palatine Chapel was only one part of the renewed ancient Roman imperial authority that was enforced, both institutionally and formally in the Carolingian Empire. In the residence of Aquisgranum, which was permanent for several years at the time, this form of rule was condensed in the design of the Palatinum, in which the square and octagon mutated into a symbol of Charlemagne's rule in his throne, in his basilica and even in his signature (figs. 17, 18, 19).

English text by the author

1. For further details: Pieper, Schindler 2017, pp. 155-164.

2. For further details: Pieper, Schindler 2017, pp. 147-154, p. 164.

Così, confrontando entrambe le misure *A* e *B* usando l'algoritmo di Euclide del quale si è già parlato, si trova il loro massimo comun divisore $MCD = 2,4$ pr! Questo è il modulo comune a tutte le misure dell'edificio, definito anche come 1,2 pr con un rapporto 12/10 pr nella misura del piede: ma questo modulo coincide con il *pes agrimensorum* [Isidorus 1848; Isidoro 1911; Wintermantel 2018], ampiamente utilizzato in particolare a Ravenna e nelle province longobarde del Nord Italia all'epoca di Carlo Magno [Pieper, Schindler 2017, pp. 212-217]. Il *pes agrimensorum* introduce dunque nell'ottagono un modulo $M = 12/10$ pr con le seguenti dimensioni modulari intere per il suo alzatao (fig. 16):

- ottagonato = 41 *M* (= 49,2 pr nella parte superiore)
- lato del poligono = 17 *M*
- pilastro d'angolo approssimativo = 2,5 *M*
- altezza del pilastro d'angolo = 10 *M*
- campata dell'arco = 12 *M*
- altezza dell'arcata inferiore = 18 *M*
- livello inferiore = 22 *M*
- altezza del pilastro della galleria = 24 *M*
- altezza dell'arcata superiore = 30 *M*
- tamburo e volta = 41 *M*.

Conclusioni

Entrambe le unità di misura, il *pes romanus capitolinus* e il *pes agrimensorum* dell'Italia settentrionale, hanno un multiplo comune pari a 1/10 di *pes romanus capitolinus*, ovvero il piede romano con divisione su base 10. Carlo Magno ricorse al piede romano e al sistema di misurazione in uso nel regno di

Teodorico nel Nord Italia per la costruzione della sua chiesa ad *Aquisgranum* (Aachen), il luogo in cui i futuri sovrani sarebbero stati incoronati in sua memoria.

Le dimensioni del deambulatorio a sedici lati e delle sezioni del muro inferiore dell'ottagono indicano che l'edificio fu inizialmente dimensionato con un *pes romanus capitolinus* di 29,48 cm, basato su una suddivisione decimale: una sezione di muro di 3,5 pr nell'ottagono inferiore pari a 49 pr e un esadecagono di 100 pr con una sezione del muro di 5 pr. Le misure dell'alzatao interno mostrano la perfezione proporzionale della tradizione edilizia longobarda dell'Italia settentrionale in relazione al *pes agrimensorum* di 35,37 cm. L'architettura della Cappella Palatina di Aachen rappresentava parte della rinnovata autorità imperiale romana, che fu in seguito attuata sia istituzionalmente che formalmente nell'Impero Carolingio. Nella residenza di *Aquisgranum*, che per diversi anni fu sede permanente della corte imperiale, questa forma di governo prese forma nel disegno del *Palatinum*, nel quale il quadrato e l'ottagono si trasformarono in un simbolo del potere di Carlo Magno, e ciò si riscontra nel suo trono, nella sua basilica e persino nella sua firma (figg. 17, 18, 19).

Traduzione dall'inglese della Redazione

1. Per approfondimenti: Pieper, Schindler 2017, pp. 155-164.

2. Per approfondimenti: Pieper, Schindler 2017, pp. 147-154, p. 164]

References

La ricerca è stata pubblicata in Pieper, Schindler 2017: tutta la letteratura e i documenti sono reperibili alle pp. 227-238. Tuttavia le più importanti pubblicazioni scientifiche che giustificano o completano la nostra indagine, che altrimenti utilizza l'edificio stesso come la fonte più importante di conoscenza, sono di seguito elencate. / *The research was published in Pieper, Schindler 2017: all literature and documents are found at pp. 227-238. Nevertheless, the most important scientific publications that substantiate or complete our investigation, which otherwise uses the building itself as the most important source of knowledge, are collected there.*

- Alcuinus, Epistulae 1777 = Alkuin, Albinus Flaccus sive Alcuinus. *Epistulae*. In *Editio Frobenius, Opera Alcuini Abatis, Carolimagni Regis ac Imperatoris Magistri Opera*. Münchener Staatsbibliothek, Ratisbonae 1777. Epistula 84. <https://books.google.de/books?id=xkWSyeZNN8UC&pg=PA49&lpg=PA49&dq=Alkuin+%22epistola+49%22&source=bl&ots=mOV6eC4jDB&sig=5cmvQur58zHLJzqRq0kKiA4a69w&hl=de&sa=X&ved=0ahUKEwiyOYL5n_PUAhWLXBQKHVmcDqgQ6AEIPzAD#v=onepage&q=Alkuin%20%22epistola%2049%22&f=false>.
- Braunfels 1965 = Wolfgang Braunfels. *Karl der Große*. Lebenswerk und Nachleben. Volume 1-4, Düsseldorf 1965-1967.
- Braunfels 1968 = Wolfgang Braunfels. *Die Welt der Karolinger und ihre Kunst*. München 1968.
- Buchkremer 1955 = Joseph Buchkremer. Der Dom zu Aachen. Beiträge zur Baugeschichte. In *Hundert Jahre Denkmalpflege am Aachener Dom*. Band III. Aachen 1955.
- Chouquer, Favory 2001 = Gérard Chouquer, François Favory. *L'arpentage Romain*. Paris 2001, pp. 268-271. ISBN: 2877722163.
- Euclide VII - 2 = Vincenzo Flauti. *Gli Elementi di geometria di Euclide, emendati in que' luoghi, in cui una volta furono viziati da Teone, o da altri; e ne' quali sono restituite alcune definizioni, e dimostrazioni dello stesso Euclide*. Napoli, nella stamperia per le opere del prof. Flauti 1834. Libro VII, Prop. 2.
- Gerhardt, Kurrer, Pichler 2003 = Rolf Gerhardt, Karl-Eugen Kurrer, Gerhard Pichler. The methods of graphical statics and their relation to the structural form. In *Proceedings of the First International Congress on Construction History*. Madrid, 20th - 24th January 2003. Ed. by Santiago Huerta. Instituto Juan de Herrera, Escuela Técnica Superior de Arquitectura Madrid. Vol. 2, 2003, pp. 997-1006.
- Heckner, Beckmann 2012 = Ulrike Heckner, Eva-Maria Beckmann (eds.). *Die karolingische Pfalzkapelle in Aachen. Material - Bautechnik - Restaurierung*. Arbeitsheft der rheinischen Denkmalpflege 78, Worms, Wernersche Verlagsgesellschaft 2012. ISBN: 9783884623251.
- Hyginus 800 = Hyginus gromaticus. *De Limitibus Constituendis*. Codex Vaticanus, Biblioteca Apostolica Vaticana, Pal. Lat. 1564, Foll. 82v - 108v (149v), 800 (?). In *Hyginus - Das Feldmesserbuch*. Edition Jens - Olaf Lindermann, Eberhard Knobloch und Cosima Möller. WBG Darmstadt 2018, pp. 111-211, in part. fig. 18 (Pal. 86r), 29 (Pal. 89v), 54 (Pal. 98r), 79 (Pal. 108r). ISBN: 9783534269907.
- Isidorus 1848 = Isidorus Hispalensis. *Etymologiae, Libri XX (Excerpta) - Liber XV - De mensuris agrorum*. Edition Lachmann / Blume / Rudorff, 1848/52.
- Isidorus 1911 = Isidori Hispalensis Episcopi. *Etymologiarum, sive Originum libri XX*. Editio W. M. Lindsay, Oxford 1911.
- Konneggen 2011 = Lydia Konneggen. Opere mirabili constructa. Ein kurzer bauhistorischer Abriss zum Aachener Dom. In *Dombaumeistertagung in Aachen 2009: Vorträge zum Aachener Dom*. Aachen 2011, pp. 29-40.
- Krücken 2016 = Monika Krücken (ed.). *Offensichtlich Verborgen. Die Aachener Pfalz im Fokus der Forschung*. Geymüller, Aachen 2016. ISBN: 9783943164169.
- Ley 2014 = Judith Ley. Warum ist die Aachener Pfalzkirche ein Zentralbau? Der neue Salomonische Tempel als Vorbild herrschaftlicher Kirchenstiftung. In Clemens Bayer, Max Kerner, Harald Müller. *Der Aachener Dom in seiner Geschichte*. Quellen und Forschungen, Vol. I, 2014, pp. 95-112. ISBN: 9783795428013.
- Maintz 2012 = Helmut Maintz. *Sanierung der Mosaiken, Marmorverkleidung und Fußböden im Zentralbau des Aachener Doms*. Schriftenreihe des Karlsverein-Dombauverein, Band 14 - 2012. Thouet, Aachen 2012.
- Pieper, Schindler 2017 = Jan Pieper, Bruno Schindler. *Thron und Altar, Oktogon und Sechzehneck. Die Herrschaftsikonographie der karolingischen Pfalzkapelle zu Aachen*. Berlin: Geymüller Verlag für Architektur, 2017. ISBN: 9783943164381.
- Pritchard 2023 = Douglas Pritchard. The intersection of technology, graphic communication and cultural heritage representation. *Disegnare. Idee Immagini*, 66, 2023, pp. 48-63. ISSN: 1123-9247. <https://dsdra.web.uniroma1.it/sites/default/files/allegati/Disegnare%2066_2023_0.pdf>.
- Pritchard et al. 2023 = Douglas Pritchard, Marika Griffio, Martina Attenni, Roberto Barni, Carlo Bianchini, Carlo Inglese, Yannick Ley. Evolution of recording methods: the Aachen Cathedral World Heritage Site documentation project. *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, XLVIII-M-2-2023, pp. 1241-1249. ISSN: 2194-9034. <<https://doi.org/10.5194/isprs-archives-XLVIII-M-2-2023-1241-2023, 2023>>.
- Schaub 2011 = Andreas Schaub. Neue archäologische Untersuchungen im Aachener Dom. In *Dombaumeistertagung in Aachen 2009: Vorträge zum Aachener Dom*. Aachen 2011, pp. 101-108.
- Schindler et al. 2005 = Bruno Schindler, Wilfried Führer, Rolf Gerhardt, Jan Pieper. Rekonstruktion historischer Bautechniken: Skalierung der Bausubstanz am Beispiel der Aachener Pfalzkapelle. In RWTH-Themen: Berichte aus der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, 1/2005, herausgegeben im Auftrag des Rektors der RWTH-Aachen, 2005, pp. 56-57.
- Strzygowski 1904 = Joseph Strzygowski. *Der Dom zu Aachen und seine Entstellung. Ein kunstwissenschaftlicher Protest*. Leipzig 1904.
- Svenshon 2008 = Helge Svenshon. *Einblicke in den virtuellen Himmel: Neue und alte Bilder vom Inneren der Hagia Sophia in Istanbul*. Tübingen/Berlin 2008. ISBN: 9783803006912.
- Svenshon 2010 = Helge Svenshon. Das Bauwerk als aestheton soma. Die Hagia Sophia im Spiegel antiker Vermessungslehre und angewandter Mathematik. In Falko Daim, Jörg Drauschke. *Byzanz - Das Römerreich im Mittelalter*. Monographien des RGZM, 84, Verlag des Römisch-Germanischen Zentralmuseums, Mainz 2010, pp. 59-95.
- Thomassin 1802 = Louis François Thomassin. *Instruction sur les nouvelles mesures, publiée par ordre du Ministre de l'Intérieur [...] avec les Tables de comparaison entre les Mesures anciennes du pays de Liège, et celles qui les remplacent dans le nouveau système métrique [...]*. Latour, Liège, an X, 1802.
- Wehling 1995 = Ulrike Wehling. *Die Mosaiken im Aachener Münster und ihre Vorstufen*. Arbeitsheft der rheinischen Denkmalpflege 46, Rheinlandverlag Köln 1995. ISBN: 379214914.
- Wintermantel 2018 = Stefan Wintermantel. *Geometrie, Maß und Zahl an der Aachener Marienkirche Karls des Großen, an der karolingischen Abteikirche in Kornelimünster und an der Einhardsbasilika in Michelstadt-Steinbach*. Zeitschrift des Aachener Geschichtsvereins, 119/120, 2018, pp. 51-194.

La rivista è inclusa nella Web of Science Core Collection (Clarivate Analytics), dove è indicizzata nell'Arts & Humanities Citation Index e nel database di Scopus dove sono presenti gli abstract dei contributi.

La selezione degli articoli per *Disegnare. Idee Immagini* prevede la procedura di revisione e valutazione da parte di un comitato di referee (*blind peer review*); ogni contributo viene sottoposto all'attenzione di almeno due revisori, scelti in base alle loro specifiche competenze. I nomi dei revisori sono resi noti ogni anno nel numero di dicembre.

The journal has been selected for coverage in the Web of Science Core Collection (Clarivate Analytics); it is indexed in the Arts & Humanities Citation Index and abstracted in the Scopus database.

The articles published in Disegnare. Idee Immagini are examined and assessed by a blind peer review; each article is examined by at least two referees, chosen according to their specific field of competence. The names of the referees are published every year in the December issue of the journal.

Gli autori di questo numero
Authors published in this issue

Martina Attenni
 Dipartimento di Storia, disegno e restauro
 dell'architettura
 Sapienza Università di Roma
 piazza Borghese, 9
 00186 Roma, Italia
 martina.attenni@uniroma1.it

Roberto Barni
 Dipartimento di Storia, disegno e restauro
 dell'architettura
 Sapienza Università di Roma
 piazza Borghese, 9
 00186 Roma, Italia
 roberto.barni@uniroma1.it

Carlo Bianchini
 Dipartimento di Storia, disegno e restauro
 dell'architettura
 Sapienza Università di Roma
 piazza Borghese, 9
 00186 Roma, Italia
 carlo.bianchini@uniroma1.it

Marika Griffio
 Dipartimento di Storia, disegno e restauro
 dell'architettura
 Sapienza Università di Roma
 piazza Borghese, 9
 00186 Roma, Italia
 marika.griffio@uniroma1.it

Yannick Ley
 Chair of Architectural History
 RWTH Aachen University
 Schinkelstraße 1
 52062 Aachen, Germania
 yannick.ley@rwth-aachen.de

Douglas Pritchard
 Scott Sutherland School of Architecture
 Robert Gordon University
 Garthdee House, Garthdee Road
 Aberdeen, AB10 7QB, Scozia, Regno Unito
 d.pritchard1@rgu.ac.uk

Jan Richarz
 Domkapitel Aachen
 Dombauhütte
 Klosterplatz 2
 52062 Aachen, Germania
 Klosterplatz 3 / 1.OG

Bruno Schindler
 RWTH Aachen University
 Templergraben 55
 52062 Aachen, Germania
 schindler@ages.rwth-aachen.de

Jan Richarz
L'importanza di un modello 3D
per la Cattedrale di Aachen
*The importance of a 3D model
for Aachen Cathedral*

Yannick Ley
L'evoluzione della Cattedrale di Aachen
in sedici immagini
*The evolution of Aachen Cathedral
in sixteen figures*

Douglas Pritchard
La documentazione della Cattedrale di Aachen:
approcci integrati per la conservazione digitale
utilizzando *Terrestrial Laser Scanning*
e fotogrammetria
*The documentation of Aachen Cathedral:
integrated approaches for digital preservation
using Terrestrial Laser Scanning
and photogrammetry*

Bruno Schindler
La geometria della Cappella Palatina
di Aachen e il sistema di misurazione pratica
applicato in cantiere
*The geometry of the Aachen Palatine Chapel
and the practical measurement system
on the building site*

Carlo Bianchini
Sulle unghie coniche della Cappella Palatina
di Aachen
*The conical vaults in the Palatine Chapel
in Aachen*

Martina Atteni, Roberto Barni, Marika Griffò
Sperimentazioni di *Machine Learning*
per la mappatura della Cattedrale di Aachen
*Machine Learning experiments for mapping
Aachen Cathedral*



**WORLDWIDE DISTRIBUTION
AND DIGITAL VERSION
EBOOK
AMAZON, APPLE, ANDROID**
WWW.GANGEMEDITORE.IT

